UNIVERSITETI I TIRANËS
FAKULTETI I SHKENCAVE TË NATYRËS
DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS SË APLIKUAR

TEZË DOKTORATURE

PËR MBROJTJEN E GRADËS SHKENCORE "DOKTOR"

QËNDRUESHMËRIA E ZGJIDHJES SË EKUACIONEVE ME DIFERENCA DHE ZBATIME NË EKONOMIKS

Përgatiti:
Msc. Pranvera MULLA

Udhëheqës shkencor:
Prof. Dr. Fatmir HOXHA

Tiranë, 2014

UNIVERSITETI I TIRANËS
FAKULTETI I SHKENCAVE TË NATYRËS
DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS SË APLIKUAR

TEZË DOKTORATURE

Paraqitur nga:
Msc. PRANVERA MULLA

për mbrojtjen e gradës shkencore
"DOKTOR"

Tema:

QËNDRUESHMËRIA E ZGJIDHJES SË EKUACIONEVE ME DIFERENCA DHE ZBATIME NË EKONOMIKS

Mbrohet më datë _____ para Komisionit të përbërë nga:

1. _____ Kryetar
2. _____ Anëtar (Oponent)
3. _____ Anëtar (Oponent)
4. _____ Anëtar
5. _____ Anëtar

Dedikuar babait tim...

Përmbledhje

Vitet e fundit teoria e aplikimit të ekuacioneve me diferenca ka marrë përparësi sepse me anën e tyre ndërtohen modele dinamike të cilat jo vetëm përshkruajnë proceset reale ekonomike, por edhe ndihmojnë në kuptimin dhe spjegimin e koncepteve kryesore të ekonomisë së sotme si bifurkacioni dhe kaosi.

Bazuar në teorinë e ekuacioneve me diferenca jepet koncepti i pikës së ekuilibrit dhe qëndrueshmërisë në modelet dinamike për të cilat analizohen cilësitë kualitative të zgjidhjes së tyre. Modeli cobweb është parë në evolucionin e tij nga forma lineare në jolineare, duke paraqitur aplikimin e tij në një model jolinear, tek i cili ndërthuren kushte matematikore të qëndrueshmërisë me formimin e pritshmërive heterogjene.

Nëpërmjet eksperimentit të zhvilluar me një grup studentësh testohet hipoteza e pritshmërive racionale në modelin cobweb dhe studjohet formimi i pritshmërive, ku subjektet përcaktojnë çmimet për periudhën e ardhshme duke mësuar me kalimin e kohës e duke iu përshtatur modelit. Përfundimet e eksperimentit tregojnë se nuk rrëzohet hipoteza e pritshmërive racionale për mesataren e çmimeve, por jo në çdo rast krijohet një strukturë e parashikueshme për çmimet e tregut nga e cila disa subjekte të caktuara mund të përfitojnë.

Për të analizuar qëndrueshmërinë e sistemit të kërkesës dhe ofertës, do të zbatohet modeli cobweb në tregun e pasurive të paluajtshme. Në këtë model kërkesa dhe oferta merren jolineare dhe nëpërmjet simulimit numerik në matlab rezulton se luhatje të vogla të konstanteve shkaktojnë ndryshime të mëdha, bifurkacion dhe kaos i cili mund të shmanget nëpërmjet ndërhyrjes në model, që e përkthyer në terma ekonomikë do të thotë se oferta e tokës ka një influencë të dukshme në tregun e pasurive të patundshme. Kombinime të ndryshme në këtë metodë të çmimit të tokës me çmimin e ndërtimeve ndihmojnë për të kaluar nga gjendja e kaosit në gjendje të qëndrueshme.

Nisur nga kufizueshmëria e përdorimit të modeleve lineare, del në pah rëndësia dhe efikasiteti i përdorimit të modeleve jolineare, qëndrueshmëria e të cilëve është testuar me të dhëna reale.

Testimi i bërë me të dhëna nga agrobiznesi për disa kultura bujqësore tregon se modeli logjistik i diskretizuar është një model cobweb me anën e të cilit bëjmë parashikimin e çmimeve për vitet e ardhshme. Modeli është testuar me të dhëna test [Gonze, 2013, Ramos, 2013] për t'u siguruar për vlefshmërinë e tij . Kodet në Matlab janë shkruar për modelin konkret dhe nuk janë përdorur modele apo M-File të gatshme që ofron Matlab-i. Rezultatet e testimit tregojnë se modeli është i përshtatshëm për t'u përdorur në kushtet tona.

Fjalët kyçe: ekuacione me diferenca, qëndrueshmëri, pritshmëri, model cobweb

Abstract

During the recent years, considerable attention has been directed towards the application theory of difference equations, since they are a means of building dynamic models which not only describe real economic problems, but also contribute to explaining and understanding crucial concepts of today's economy like bifurcacion and caos. Based on the theory of difference equations, the concept of equilibrium point is introduced in dynamic models, for which the qualitative characteristics of their solutions are analysed.

Cobeweb model has been seen in its evolution, from its linear form to its nonlienar one, by presenting its application in a nonlinear model which combines the mathematical conditions of stability with forming heterogeneus expectations.

The developed experiment tests the hypothesis of rational expectations in cobeweb model and studies the expectation formation of economic agents, where subjects predict the prices of the following period by learning over the time and adjusting to the model. The conclusions bolster the hypothesis of rational expectation formation for the mean prices, but a predictable structure for market prices, from which specific subjects may take advantage of, is not created in every case. An application of cobweb model in immobile assets market where demand and offer represent nonlinear function is analyzed and the stability of the system is studied through computer simulations.

Due to the limitations of using linear models, the importance and efficency of using nonlinear ones, whose stability is tested with actual data, is demonstrated. The test conducted utilizing agricultural data for specific products divulges that the logistic model discretised is a cobweb model. The model is experimented for test models Gonze (2013), Ramos (2013) to ensure its validity. Matlab codes have been written for the actual model and available models and M-File in Matlab have not been used. The results reveal that the model is appropriate to use in our conditions.

Keywords: difference equations, stability, expectations, cobweb model

PËRMBAJTJA

FALËNDERIME V

LISTA E FIGURAVE VI

LISTA E TABELAVE VII

HYRJE VIII

KAPITULLI 1 Ekuacionet dhe sistemet e ekuacioneve me diferenca 1

1.1 Ekuacionet me diferenca të rendit të parë dhe të rendit p 1

1.1.1 Zgjidhja e ekuacioneve të rendit të parë 1

1.1.2 Gjendja e qëndrueshme dhe qëndrueshmeria 3

1.1.3 Ekuacionet me diferencave të rendit *p* 7

1.2 Sistemet e ekuacioneve lineare me diferenca 14

1.2.1 Sistemet homogjenë të ekuacioneve me diferenca të rendit të parë 14

1.2.2 Sistemet johomogjenë të ekuacioneve me diferenca të rendit të parë 18

1.3. Qëndrueshmëria e zgjidhjeve të sistemeve të ekuacioneve me diferenca 19

1.3.1 Qëndrueshmëria e sistemeve lineare të rendit të parë 19

1.3.2 Qëndrueshmëria e sistemeve lineare të rendit të dytë 21

1.3.3 Sistemet e ekuacioneve të rendeve të larta 22

1.4 Zgjidhja numerike e ekuacioneve diferenciale 25

1.4.1 Përafrimi i zgjidhjes së ekuacioneve diferenciale me metodën e Eulerit 25

1.4.2 Formula që lidhin derivatet e pjesshme me diferencat e fundme 26

1.4.3 Pajtueshmëria, qëndrueshmëria dhe konvergjenca 28

KAPITULLI 2 Modeli Cobweb 32

2.1 Model i rritjes Solow 32

2.2 Një model i mbështetjes së çmimeve 35

2.3 Modeli Cobweb 36

2.3.1 Ndërtimi i modelit të thjeshtë Cobweb 37

2.3.2 Modeli Cobweb me pritshmëri adaptive 41

2.3.3 Modeli cobweb me funksion jolinear të kërkesës 47

2.3.4 Modeli cobweb me agjente heterogjenë 50

2.3.5 Modeli cobweb me pritshmëri racionale përballë atij me pritshmëri adaptive..... 56

KAPITULLI 3 Zbatime të modelit cobweb 61

3.1 Një eksperiment mbi bazën e modelit cobweb me pritshmëri racionale..... 61

3.1.1 Pritshmëritë heterogjene 61

3.1.2 Hipoteza..... 63

3.1.3 Modelimi i eksperimentit..... 64

3.1.4 Disa rezultate e përfundime 65

3.1.5 Dinamika e çmimeve 66

3.1.6 Parashikueshmëria e çmimeve..... 70

3.2 Aplikimi i modelit cobweb në kushtet ekonomike të Shqipërisë..... 73

3.2.1 Propozime dhe strategji 76

3.3 Modeli dinamik cobweb me funksion jolinear të kërkesës dhe ofertes për tregun e pasurive të patundshme 77

3.3.1 Modele jolineare për tregun e pasurive të patundshme 77

3.3.2 Analiza e qëndrueshmërisë 78

3.3.3 Simulime numerike..... 80

3.4 Zbatimi i modelit cobweb për përcaktimin e qëndrueshmërisë së çmimit të disa produkteve bujqësore të rrethit të Sarandës 84

3.4.1 Lidhja e ekuacionit logjistik me modelin cobweb..... 84

3.4.2 Studimi i qëndrueshmërisë së ekuacionit logjistik 86

3.4.3 Studimi i qëndrueshmërisë dhe parashikueshmërisë mbi të dhëna reale..... 88

PËRFUNDIME..... 93

REFERENCA..... 95

SHTOJCA..... 103

Falënderime

Janë të shumtë ata që më ndihmuan në finaliziminin e këtij studimi të cilët i falënderoj përzemërsisht.

Ka qenë privilegj dhe kënaqësi për mua që kam pasur udhëheqës të doktoraturës Prof. Dr. Fatmir Hoxha, të cilin e falënderoj për ndihmën, durimin, korrektesën, konsultat dhe këshillat shkencore e profesionale të ofruara gjatë gjithë kohës së shkollës së doktoraturës.

Një falënderim dhe mirënjohje e veçantë shkon për Prof. Dr. Kozeta Sevrani që besoi tek unë, më inkurajoi, ndihmoi dhe mbështeti në gjithë këto vite studimi .

Falënderoj familjen time, dy fëmijët Junidën dhe Erandin për të cilët jam shumë krenare.

Me respekt
Pranvera Mulla

LISTA E FIGURAVE

Figura 1.1: Pikat e ekuilibrit për funksionin logjistik 4
Figura 1.2: Sjellja e $X_t = \lambda_1^t$ ku $\lambda \in R$ 11
Figura 1.3: Sjellja e X_t në rastin e rrënjëve komplekse 11
Figura 2.1: Konvergjenca e çmimit në modelin Cobweb 39
Figura 2.2: Konvergjenca e modelit me pritshmëri adaptive me koeficient $\mu_1 = -1$ 44
Figura 2.3: Konvergjenca e modelit me pritshmëri adaptive me koeficient $\mu_2 = -1.4$ 44
Figura 2.4: Konvergjenca e modelit me pritshmëri adaptive me koeficient $\mu_4 = +1$ 44
Figura 2.5: Konvergjenca e modelit me pritshmëri adaptive me koeficient $\mu_5 = +1$ 45
Figura 2.6: Konvergjenca e modelit me λ_t të rastësishme me $\sigma_1 = 1$ 46
Figura 2.7: Konvergjenca e modelit me λ_t të rastësishme me $\sigma_1 = 3$ 47
Figura 2.8: Konvergjenca e modelit me λ_t të rastësishme me $\sigma_1 = 6.5$ 47
Figura 3.1: Grafiku i çmimit dhe autokorrelacioneve për PR 66
Figura 3.2: Grafikët e çmimeve 68
Figura 3.3: Funksionet e autokorrelacionit 72
Figura 3.4: Indeksi në % i çmimeve të konsumit 74
Figura 3.5: Çmimet e perimeve për vitin 2011 74
Figura 3.6: Çmimet e perimeve sipas zonave 74
Figura 3.7: Rasti 3.1 81
Figura 3.8: Rasti 3.1 81
Figura 3.9: Rasti 3.2 81
Figura 3.10: Rasti 3.2 81
Figura 3.11: Rasti 3.3 82
Figura 3.12: Rasti 3.3 82
Figura 3.13: Rasti 3.4 82
Figura 3.14: Rasti 3.4 82
Figura 3.15: Rasti 3.5 83
Figura 3.16: Rasti 3.5 83
Figura 3.17: Rasti 3.6 83
Figura 3.18: Rasti 3.6 83
Figura 3.19: Ecuria për agrumet nisur nga P_0=1994 dhe $t_1 = 2$ 89
Figura 3.20: Ecuria për agrumet nisur nga P_0=1994 dhe $t_1 = 3$ 89
Figura 3.21: Ecuria për agrumet nisur nga P_0=2006 dhe $t_1 = 2$ 89
Figura 3.22: Ecuria për agrumet nisur nga P_0=2006 dhe $t_1 = 3$ 90
Figura 3.23: Ecuria për grurin nisur nga P_0=20044 dhe $t_1 = 2$ 90
Figura 3.24: Ecuria për grurin nisur nga P_0=2004 dhe $t_1 = 3$ 91
Figura 3.25: Ecuria për grurin nisur nga P_0=2004 dhe $t_1 = 3$ 91
Figura 3.26: Ecuria për grurin në intervalin kohor 2004-2016, për $t_1 = 2$, $t_1 = 3$ 92

LISTA E TABELAVE

Tabela 3.1: Dizenjimi i eksperimenteve për tri raste të ndryshme. 65
Tabela 3.2: Karakteristikat statistike për periudha të ndryshme 69
Tabela 3.3: Testet për mesataret dhe variancën për 50 periudha 70
Tabela 3.4: Testet për mesataren dhe variancën për 25 periudhat e fundit 70
Tabela 3.5: Çmimi mesatar dhe prodhimi i domates në rrethin e Sarandës në vite. 84
Tabela 3.6: Vlerat e 10 iteracioneve të para të ekuacionit 3.24 për vlera të ndryshme të r 88
Tabela 3.7: Koeficientët r dhe M për intervale të ndryshëm kohorë 88
Tabela 3.8: Koeficientët ***r*** dhe *M* për intervale të ndryshëm kohorë 90
Tabela 3.9: Çmimet e grurit në vite dhe vlerat e parashikuara nga modeli cobweb 92

HYRJE

Aplikimi i ekuacioneve diferenciale dhe atyre me diferenca në modelimin e problemeve të jetës reale në të gjitha fushat e shkencës është i shumtë dhe më i preferuari, pasi ato paraqesin më së miri dinamikën e tyre.

Teoria e ekuacioneve diferenciale dhe ekuacioneve me diferenca formojnë dy përfaqësime ekstreme të problemeve të botës reale. Kështu një model i thjeshtë i paraqitur me anë të një ekuacioni diferencial tregon sjellje të mirë të zgjidhjeve, ndërsa analogu i tij përkatës diskret tregon sjellje kaotike dhe sjellja reale është diku midis tyre.

Ekuacionet me diferenca, metodat e përparuara dhe aplikimet e gjera në vitet e fundit kanë zënë një vend të rëndësishëm e janë bërë mjet themelor i analizave ekonomike, e ndihmuar kjo nga zhvillimi i madh i teknologjisë dhe metodave të kompjuterizuara.

Përzierja unike e teorisë së ekuacioneve diferenciale me kërkesat e tyre aplikative në ekonomi, rezultatet e cilësitë kualitative të zgjidhjes dhe qëndrueshmëria globale, ndihmojnë në kuptimin e koncepteve kryesore të ekonomisë së sotme si bifurkacioni dhe kaosi dhe ofrojnë njohuri në dinamikën ekonomike jolineare.

Ekonomistët janë të interesuar për modelet rekursive. Ky interes rrjedh nga një nevojë në rritje për projeksionet ekonomike afatgjata dhe për parashikimin e efekteve të mundshme të programeve dhe politikave ekonomike në një botë dinamike, ku kushtet e kaluara dhe kushtet e tanishme ndihmojnë në përcaktimin e të ardhmes ekonomike.

Sfondi i studimit

Kriza e viteve të fundit solli në qendër të vëmendjes shqyrtimin e marrëdhënies midis matematikës dhe ekonomisë. Analiza e bërë në supozime të karakterit matematik duke u bazuar mbi rregullsinë e asaj që ka ndodhur në të kaluarën nuk ka shërbyer plotësisht për të shmangur krizën, pasi në ekonomi pritshmëritë dhe psikologjia e tregut kanë shumë rëndësi dhe modelet matematike duhet të bazohen në pritjet heterogjene të të mësuarit.

Analiza e problemeve të ndryshme ekonomike është kryer duke u bazuar në supozime, të cilat kufizojnë studimet në fusha të ndryshme të ekonomisë. Në një botë reale ku çdo gjë ndryshon në mënyrë dinamike, teoria e ekuacioneve diferenciale dhe analogjia diskrete e tyre, ekuacionet me diferenca kanë treguar se janë mjaft efikase në aplikime të gjera edhe në ekonomiks.

Ekonomistët tradicionalë, duke përdorur modelime lineare analizonin kryesisht lëvizje të rregullta në sistemet ekonomike, modele në të cilat pavarësisht se një parametër paraqet ndryshim, natyra cilësore e sjelljes nuk ndryshon.

Aplikacionet e shumta në ekonomiks, por jo vetëm, proceset e shpejta apo të ngadalshme, ndryshimet e parashikuara ose jo, katastrofat natyrore, sisteme ekonomike në kolaps, bifurkacioni, rritja ekonomike, ciklet, kaosi, e të tjera Lasselle (2005), Gonze (2013) nuk mund

të shqyrtohen në mënyrë efektive me anën e modeleve lineare dhe ekuilibrave stastikë, por me modele jolineare që bëjnë të mundur analiza ekonomike dhe ndërtimin e politikave afatgjata.

Sipas studimeve të fundit, Neuser (2008), Lasselle (2005) për modelet dinamike jolineare një ndryshim i vogël i parametrave mund të çojë në ndryshime të papritura sasiore dhe cilësore të sistemit dhe kjo spjegon më së miri bifurkacionin dhe kaosin tipar kryesor i të cilit është ndjeshmëria ndaj ndryshimit të kushteve fillestare.

Diskretizimi i ekuacioneve diferenciale Reddy (1990), Elaydi (2005), Agarwa l(2013) dhe studimi i qëndrueshmërisë së zgjidhjes së tyre është i mundur, por problemi që shqyrtohet është nëse kanë të njëjtën pikë ekuilibri ekuacioni diferencial dhe ai me diferenca dhe si mund të bëhet ky përafrim.

Teoria e ekuacioneve me diferenca, e cila përshtatet për t'u përdorur gjithmonë e më tepër në ekonomiks është përpunuar vazhdimisht e vitet e fundit nga Kelley, W.G.(1991), Meyer (2000), Agarwal (2000),Kulenoviç M.R.S (2003), Elaydi (2005),Galo r(2007), Neuser (2008) e të tjerë duke nxjerrë në pah rëndësinë e studimit të kritereve të qëndrueshmërisë së zgjidhjeve për të pasqyruar kushtet ekonomike.

Duke qënë se metodat numerike përkthehen në kode kompjuterike, shumë modele jolineare bëhen të zbatueshëm pasi sot janë ndërtuar programe të avancuara që gjenerojnë të dhëna dhe ndihmojnë në parashikime Ramos (2013) dhe paraqitja e modeleve të tilla ndihmon në përshkrimin e efekteve të masave të përdorura në sektorë të ndryshëm si dhe në parashikime ose përshkrime të sistemeve ekonomike.

Në këtë studim modeli cobweb si modeli i parë dinamik Ezekiel (1938) merr një vëmendje të veçantë pasi kombinon metodat matematikore të gjetjes së pikës së ekuilibrit, me modelet ekonomike të pritshmërisë së agjenteve ekonomikë. Pas paraqitjes së modelit me pritshmëri racionale Lukas (1986) një numër i madh i modeleve me agjentë heterogjenë është futur në ekonomi së fundmi Chiarella, Ai (2000),Hommes (2011, 2013) e të tjerë .

Një sfidë e rëndësishme për makroekonominë eksperimentale është të shpjeguarit e devijimeve të vazhdueshme nga ekuilibri që shfaqin të dhënat eksperimentale Hommes (2013) dhe një teori e tillë duhet të bazohet në pritjet heterogjene të të mësuarit.

Teori të ndryshme për formimin e pritshmërive nxjerrin rezultate kontradiktore për sa i përket qëndrueshmërisë ose joqëndrueshmërisë së gjendjes së ekuilibrit me pritshmëri racionale në modelin Cobweb, Hommes et al, (2007) dhe kjo bëri të nevojshme simulimin në një mjedis eksperimental me një grup studentësh ku studiohet formimi i pritshmërive në mjedis me agjentë heterogjenë.

Jo çdo model jolinear mund të plotësojë kushtet e qëndrueshmërisë duke përdorur të dhëna reale nga Shqipëria Mulla (2013). Testimi i bërë me të dhëna nga agrobiznesi për disa kultura bujqësore tregon se modeli cobweb, Ramos (2013), Gonze (2013) është i përshtatshëm për t'u përdorur, pasi konstantet e llogaritura plotësojnë kushtet e qëndrueshmërisë së modelit dhe kjo ndihmon për të bërë parashikme për vitet e ardhshme.

Qëllimi i punimit

Qëllimi i këtij punimi është studimi i qëndrueshmërisë së ekuacioneve me diferenca dhe paraqitja e modeleve dinamike jolineare për të kuptuar më mirë evolucionin e proceseve ekonomike, pasi ato tregojnë sesi kaosi mund të ndodhë edhe në një sistem shumë të thjeshtë, ku ndërveprimi i faktorëve mund të sjellë ndryshime të mëdha cilësore.

Idetë themelore rreth kompleksitetit të proceseve të ndryshme ekonomike kanë gjetur aplikime në ekuacionet me diferenca për ndërtimin e modeleve që paraqesin jo vetëm këtë kompleksitet, por edhe heterogjenitetin e agjentëve ekonomikë, të cilët luajnë rol të rëndësishëm në formimin e pritshmërive.

Ky punim ka si qëllim paraqitjen e disa modeleve ekonomike duke përdorur ekuacionet me diferenca dhe aplikimin e tyre në situata të ndryshme ekonomike si teorike dhe aplikative e nëpërmjet modelimit eksperimental të tregjeve agrikulturore studjohet qëndrueshmëria e pikës së ekuilibrit dhe sjellja e modeleve.

Nisur si një model në agrobiznes, qëllimi është studimi i qëndrueshmërisë së modeleve jolineare me ekuacione diferenciale të shtrirë në tregun e pasurive të paluajtshme dhe tregjet bujqësore në ekonominë shqiptare ku ka një luhatje të dukshme për shkak të ofertës e kërkesës, por përparësia e modeleve cobweb është përdorimi edhe në sektorë të ndryshëm të ekonomisë.

Objektivat e punimit

Zgjedhja e kësaj teme u motivua nga rëndësia që kanë aplikimet matematikore në ekonomiks dhe gjetja e pikëtakimit të tyre që është fusha e ekonomisë dinamike tek e cila duhet të ketë një qasje më të madhe dhe për ata që nuk janë matamatikanë.

Një objektiv parësor i studimit të ekuacioneve me diferenca është të analizohet sjellja e tyre rreth pikave të ekuilibrit dhe kjo përbën teorinë e qëndrueshmërisë. Duke patur parasysh se interesohemi për cilësitë kualitative të zgjidhjeve, studimi i qëndrueshmërisësë këtyre zgjidhjeve që çojnë në përcaktimin e pikës së ekuilibrit, paraqitja grafike dhe analiza e bifurkacionit dhe kaosit merr vëmendje të veçantë.

Të tregohet se ekuacionet me diferenca janë instrumenti për zhvillime të mëtejshme të ekuacioneve diferenciale, të cilat përdorin formulime të ngjashme me to për integrimin numerik me anën e diferencave dhe kanë përdorim të gjerë në formulimin dhe analizën e sistemeve diskrete të kohës.

Shpesh kur përdorim një model matematikor në kushtet tona sipas të dhënave që disponojmë nuk arrijmë në përfundimet teorike të modelit matematik për arsye nga më të ndryshmet prandaj objektivi i punimit është testimi i modeleve jolineare me të dhëna nga vendi ynë, nisur nga një teori e caktuar.

Synohet testimi i formimit të pritshmërive duke përdorur modelin jolinear cobweb me pritshmëri racionale në një mjedis eksperimental duke parë teorinë e stabilitetit si një hipotezë që duhet testuar.

Duke përdorur modelin jolinear cobweb e duke ndryshuar konstantet e tij përcaktohen pikat fikse dhe argumentohet analitikisht e grafikisht bifurkacioni dhe kaosi për tregun e pasurive të paluajtshme.

Nisur nga modeli logjistik argumentohet se versioni diskret i tij është jolinear dhe metoda grafike rekurente është një metodë cobweb dhe për këtë model studiohet qëndrueshmëria me të dhënat reale konkrete nga agrobiznesi pasi është një sektor ku vërehen luhatje të mëdha të çmimeve dhe prodhimtarisë.

Ky kërkim synon të konfirmojë se modelet ekonomike jolineare janë mjet për analizimin e marrëdhënieve të njëkohshme midis një numri të konsiderueshëm variablash.

Metodologjia e punës

Për konceptimin dhe realizimin e këtij studimi janë përdorur metodave të përshtatshme të analizës dhe të trajtimit teorik duke përdorur një sërë burimesh si monografi, artikuj nga revista dhe konferenca shkencore ndërkombëtare, publikime shkencore ndërkombëtare, komunikime personale etj.

Ishte e nevojshme përzgjedhja dhe trajtimi i qëndrueshmërisë së zgjidhjes së ekuacioneve me diferenca të aplikueshme në ekonomiks, duke krijuar edhe një lidhje midis teorisë së ekuacioneve diferenciale dhe ekuacioneve me diferenca me anën e përdorimit të metodave numerike.

Për shkak të natyrës jolineare të modeleve, përqasja e simulimit kompjuterik për të demostruar ndërveprimin e variablave të ndryshme ishte i domosdoshëm për ndërtimin e një mjedisi artificial nga i cili mund të gjenerohen të dhëna të rëndësishme pasi përfundime për të ardhmen mund të kenë ndikime në situatat aktuale.

Metoda eksperimentale u zgjodh pasi ajo krijon situata që i kontrollon vazhdimisht, jo të njëjta dhe merr në konsideratë ndërveprimin e variablave, duke nxjerrë konkluzione për dinamikën e zgjidhjeve dhe lidhjen që ekziston midis shkencës ekzakte dhe sjelljes njerëzore në ekonomiks.

Të dhënat e grumbulluara në eksperiment u përpunuan dhe u testuan në SPSS.

Një pjesë e rëndësishme është përqasja deduktive nëpërmjet testimit empirik të modelit cobweb, duke përdorur të dhëna reale për disa produkte bujqësore të rrethit të Sarandës, të grumbulluara pranë Drejtorisë së Bujqësisë të këtij rrethi. Është ndërtuar modeli matematikor korespondues për të dhënat reale dhe me anë të analizës së qëndrueshmërisë dhe metodave numerike të zbatuara në Matlab, realizohen dhe parashikime për vitet pasuese.

Krahas metodave statistikore në përpunimin e të dhënave, metodat numerike janë përdorur për testimin e modelit cobweb jolinear.

Në Matlab kodet janë shkruar për modelin konkret dhe nuk janë përdorur modele apo M-File të gatshme që ofron Matlab-i dhe paraprakisht ato janë testuar me të dhëna test Gonze (2013), Ramos (2013), për t'u siguruar për vlefshmërinë e tij .

Gjithë grafikët, tabelat janë përpunim i autorit me përjashtim të rasteve kur është shënuar burimi.

Organizimi i studimit

Studimi është konceptuar të strukturohet në tre kapituj:

Në kapitullin e parë paraqitet shqyrtimi i literaturës duke theksuar kushte për gjendjen e qëndrueshme të zgjidhjes së ekuacioneve dhe sistemit të ekuacioneve të rendit të parë dhe rendeve më të larta. Shqyrtohet linearizimi i sistemeve të ekuacioneve dhe qëndrueshmëria e tyre, bëhet paraqitja e përafrimeve të ekuacioneve difrenciale me metodën e Eulerit dhe jepen formula që lidhin derivatet e pjesshme me diferenca të fundme me anë e metodave numerike, duke dhënë kushte pajtueshmërie, qëndrueshmërie dhe konvergjence.

Në kapitullin e dytë paraqitet modeli i rritjes Solow dhe një model i mbështetjes së çmimeve studimi i të cilëve bëhet duke përgjithësuar ekuacionin e diferencave rreth gjendjes së qëndrueshme. Modeli cobweb si modeli i pare dinamik në ekonomi paraqitet si model me funksion jolinear të kërkesës dhe ofertës dhe si një model i cili paraqet një ekonomi me agjentë ekonomik që shfaqin sjellje adaptive, racionale e heterogjene për pritshmëritë e çmimeve.

Zbatime të modelit cobweb përfshihen ***në kapitullin e tretë*** ku vend të rëndësishëm zë eksperimenti për të testuar hipotezën e pritshmërive racionale, simulimi në matlab i modelit jolinear për tregun e pasurive të paluajtshme dhe zbatimi i modelit cobweb nisur nga modeli logjistik për përcaktimin e qëndrueshmërisë së çmimit dhe prodhimit të disa produkteve bujqësore të rrethit të Sarandës.

Në fund, jepen përfundime, referencat dhe shtojca.

KAPITULLI 1
Ekuacionet dhe sistemet e ekuacioneve me diferenca

1.1 Ekuacionet me diferenca të rendit të parë dhe të rendit p

Teoria e ekuacioneve me diferenca, e cila përshtatet për t'u përdorur gjithmonë e më tepër në ekonomiks është përpunuar vazhdimisht vitet e fundit nga Kelley, W.G.(1991), CarlD dhe Meyer (2000), Agarwal (2000), Lassell (2004), KulenoviçM.R.S (2003), Elaydi (2005), Galor (2007), Neuser (2008) e të tjerë duke nxjerrë në pah rëndësinë e studimit të kritereve të qëndrueshmërisë së zgjidhjeve për të pasqyruar kushtet ekonomike.

Ekuacionet me diferenca përshkruajnë evolucionin e disa variablave në lidhje me kohën. Duke patur parasysh se zgjidhja e ekuacioneve diferenciale, zgjidhja e ekuacioneve me derivate të pjesshme si dhe zgjidhja e sistemeve të ekuacioneve me diferenca sillen me anë të reduktimeve në një ekuacion me diferenca të rendit të parë.

Analizohet zgjidhja dhe qëndrueshmëria e tyre, e cila u jep përgjigje disa pyetjeve:

A përcaktohet zgjidhja e qëndrueshme dhe a ruhet kjo qëndrueshmëri kur linearizojmë ekuacionet e diferencave të rendeve të larta?

A mund të vendoset një korespondencë midis zgjidhjes së ekuacionit diferencial linear të rendit të parë dhe atij me diferenca?

Cila është lidhja midis operatorit diferencë dhe operatorit diferencial për të ndërtuar një skemë numerike për zgjidhjen e ekuacioneve diferenciale?

1.1.1 Zgjidhja e ekuacioneve të rendit të parë

Fillimisht jepen disa kuptime themelore dhe simbolika përkatëse.

Forma e përgjithshme e një ekuacioni me diferenca është:

$$F\left(X_{t,}X_{t-1,}X_{t-2,}\dots,X_{t-p,}t\right)=0 \tag{1.1}$$

ku F është një funksion, variabli $X_{t,}\epsilon R^{n},n\geq 1,$ dhe p tregon rendin e ekuacionit të diferencës, indeksi t i kohës është nga bashkësia e numrave të plotë Mickens(1990), Neusser(2008).

Ekuacioni i mësipërm është normal nëse ai paraqitet dhe gjendet zgjidhja në mënyrë të vetme për X_t : $X_t=f\left(X_{t,}X_{t-1,}X_{t-2,}\dots,X_{t-p,}t\right)$, duke filluar nga vlerat fillestare të $X_{0,}X_{-1,}\dots,X_{-p+1,}$ dhe duke zbatuar iteracionin për $t=1,2,\dots,$ gjendet X_t. Një zgjidhje e ekuacionit me diferenca është funksioni: $g:Z\rightarrow R^{n}$ i tillë që kënaq ekuacionin e diferencave

$$F(g(t),g(t-1),\dots,g(t-p),t)=0 \quad \text{për çdo} \quad t\epsilon Z \tag{1.2}.$$

Për analizën e ekuacioneve me diferenca, krahas operatorit diferencë është e dobishme futja e operatorit "Lag" i shënuar me L. Ky operator zhvendos indeksin kohor një periodë në të shkuarën. Kështu vargu (X_t) është transformuar nga operatori "Lag" në një varg të ri (Y_t)=L(X_t) ose Y_t=X_{t-1}. Operatori L(X_t) është operator linear. Nëse janë dhënë dy vargje (X_t) dhe (Y_t), për çdo dy numra *a* dhe *b*,

$$\text{L(a}(X_t)\text{+b}(Y_t)\text{.)=La}(X_t)\text{+Lb}(Y_t)\text{=a}X_{t-1}\text{+b}Y_{t-1}. \tag{1.3}$$

Për çdo numër natyror pϵN përcaktohet operatori

$$L^p X_t = L.L \dots LX_t = X_{t-p}$$

Për $p=0$ merret operatori identik.Veprimi p-herë i operatorit mbi X_t çon në një polinom të rendit p.
Ekuacioni linear johomogjeni rendit të parë ($n=1$) dhe rendit $p \geq 1$ me koeficient konstant është:

$$X_t = \Phi_1 X_{t-1} + \Phi_2 X_{t-2} + \cdots + \Phi_p X_{t-p} + Z_t, \quad \Phi_p \neq 0, \tag{1.4}$$

ku $\Phi_1, \dots, \Phi_p$ janë numra konstante. Variabli Z_t varet nga koha dhe zakonisht përcakton disa variabla ekzogjenë ose endogjenë, të cilët influencojnë në evolucionin e X_t me kalimin e kohës.

Duke përdorur strukurën e veçantë të ndërtimit të ekuacioneve me diferenca për

$$X_t = \Phi X_{t-1} + Z_t, \tag{1.5}$$

në mënyrë rekursive gjejmë për këtë ekuacion zgjidhjen:

$$X_t = \Phi(\Phi X_{t-2} + Z_{t-1}) + Z_t = \Phi^2 X_{t-2} + \Phi Z_{t-1} + Z_t \tag{1.6}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$X_t = \Phi^t X_0 + \Phi^{t-1} Z_1 + \Phi^{t-2} Z_2 + \cdots + \Phi Z_{t-1} + Z_t$$

$$= \Phi^t X_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \Phi^j X_{t-j} \tag{1.7}$$

Duke marrë normën e diferencës ndërmjet X_t dhe termit të dytë të anës së djathtë përftohet ekuacioni:

$$\left\| X_t - \sum_{j=0}^{t-1} \Phi^j X_{t-j} \right\| = \|\Phi^t X_0\| = |\Phi^t| \|X_0\| \tag{1.8}$$

Kur ka një periudhë fillestare të përcaktuar si periudha zero, e ndalohet iteracioni i anasjelltë dhe merret $X_t^{(p)} = \sum_{j=0}^{t-1} \Phi^j X_{t-j}$ si zgjidhje e veçantë. Sidoqoftë në shumë raste nuk ka pikë fillestare nga bashkësia e numrave natyrorë, kështu që ka kuptim të vazhdohet iteracioni i mësipërm në të shkuarën e pafundme. $|\Phi^t|$ shkon në 0 kur $t \to \infty$ në qoftë se $|\Phi| < 1$ dhe në këtë rast merret ekuacioni i mëposhtëm si një zgjidhje e veçantë për ekuacionin linear:

$$X_t^{(b)} = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^j X_{t-j} \tag{1.9}$$

Zgjidhja u përftua duke zbatuar iteracionin për ekuacionin e diferencave mbrapa në kohë Neusser (2008), Elaydi (2005).

Problemi që duhet të shqyrtohet është përfitimi i një zgjidhjeje të vetme. Parimi i superpozimit zgjerohet dhe përfshin ekuacionet e rendeve më të larta, duke shërbyer edhe si bazë për t'i zgjidhur ato në tre hapa:

1.Gjetja e zgjidhjes së përgjithshme të ekuacionit homogjen ($X^{(g)}$). Kjo është zakonisht një temë teknike dhe mund t'i jepet zgjidhje mekanikisht.

2.Gjetja e një zgjidhjeje të vetme e ekuacionit johomogjen ($X^{(p)}$). Ky hap kërkon argumentime të mëtejshme ekonomike. Mund të argumentohet se nëse variabli Z_t ka vlera të kufizuara, ashtu mbetet dhe variabli X_t.

3.Parimi i superpozimit jep zgjidhjen e përgjithshme të ekuacionit johomogjen si shuma e ($X^{(g)}$) dhe ($X^{(p)}$). Megjithatë, zgjidhja varet ende nga ($X^{(g)}$) për disa konstante. Për të gjetur zgjidhjen dhe për të zgjidhur problemin e vlerave kufitare duhen kushte të mëtejshme. Këto kushte mund të vijnë në formën e vlerave fillestare ose në formën e kushtit që zgjidhja duhet të ketë tipar cilësor. Një tipar tipik në këtë konteks është kufizueshmëria, një kusht që zakonisht mund të jepet nga interpretimet ekonomike Neusser (2008), Mickens (1990).

1.1.2 Gjendja e qëndrueshme dhe qëndrueshmeria

Nga këndvështrimi ekonomik, nuk mjafton vetëm përshkrimi i evolimit të variablit të varur me kalimin e kohës, por edhe disa tipare cilësore të zgjidhjes. Për ekuacionin jolinear *n*-përmasor të rendit të parë të varur nga koha, $X_t = f(X_{t-1}, t) \in R^n$, jepet përcaktimi për pikën e eikuilibrit Neusser (2008).

Përkufizimi 1. *Një pikë $X^* \in R^n$ quhet një pikë eikulibri ose një gjendje e qëndrueshme nëqoftë se është një pikë fikse e funksionit $f(X, t)$, pra nëse X^* kënaq ekuacionin*

$$X^* = f(X^*, t) \tag{1.10}$$

Në rastin e ekuacioneve të rendit të parë të pavarur nga koha të hapësirës një përmasore, është e përshtatshme të paraqitet vendodhja e pikave të ekuilibrit dhe dinamika e (X_t) si një grafik në planin (X_t, X_{t+1}). Pikat e ekuilibrit janë pikat ku $y = x$ pret grafikun e funksionit $y = f(x)$.

Duke filluar me disa vlera fillestare $X_0 = x_0$, evolimi i X_t më pas pasqyrohet në planin (X_t, X_{t+1}), nga vargjet e mëposhtme të pikave:
$(0, x_0), (x_0, f(x_0)), (f(x_0), f(f(x_0)), (f(f(x_0)), f(f(f(x_0)))\ldots$ Duke i bashkuar këto pika me segmente merret diagrami *cobweb* Neusser (2008), Elaydi (2005).

Në përpjekje për të kuptuar sistemet ekonomike, modelet matematikore janë shfrytëzuar për aftësitë përshkruese dhe parashikuese. Shumë studjues, Ramos (2012), Lackman , Bohner M. (2008), Weisstein (2009) e të tjerë e kanë shtrirë studimin e tyre në fusha të ndryshme duke synuar gjetjen e pikave të qëndrueshmërisë dhe vlerave optimale.

Rezultatet tregojnë se ekuacioni logjistik mund të përdoret për të përshkruar ose parashikuar në fusha të ndryshme në biznes dhe ekonomi si dhe për të përshkruar efektet e masave të përdorura nga sektorë të ndryshëm.

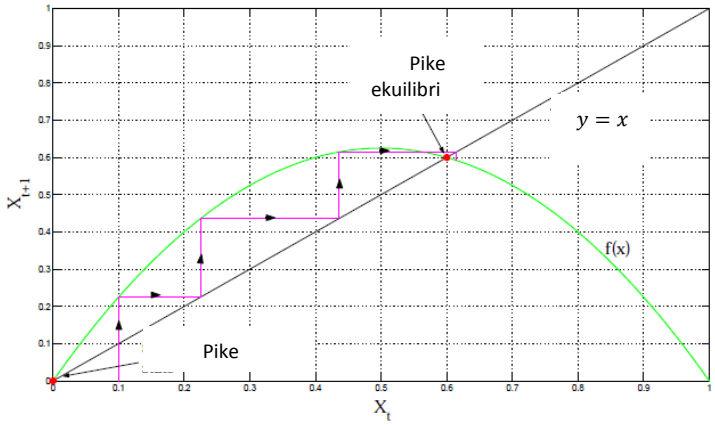


Figura 1.1: Pikat e ekuilibrit për funksionin logjistik

Burimi: Neusser (2008)

Funksioni logjistik për $\mu > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \mu x(1-x), & \text{në qofte se } 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{në të kundërt} \end{cases} \tag{1.11}$$

jep një shembull me dy gjendje të qëndrueshme. Gjendjet e qëndrueshme janë të përcaktuara nga ekuacioni: $X^* = \mu X^*(1 - X^*)$ dhe jepen në pikat $X^* = 0$ dhe $X^* = \frac{\mu - 1}{\mu}$. Figura 1.1 tregon dy pikat e qëndrueshme dhe evolucionin e X_t duke filluar në pikën $X_0 = x_0 = 0.1$ dhe duke e marrë $\mu = 2.5$.

Për ekuacionin diferencial johomogjen linear të rendit të parë ku variabli i pavarur Z_t është konstant, pra $Z_t = Z$ pika e ekuilibrit është :

$$X^* = \Phi X^* + Z \Rightarrow X^* = \frac{Z}{1-\Phi} \quad \text{për } \Phi \neq 1 \tag{1.12}$$

Për $\Phi = 1$, nuk ka pikë ekuilibri, përveç rastit kur $Z = 0$ ku çdo pikë është një pikë ekuilibri. Përderisa pika e ekuilibrit vërteton ekuacionin diferencial, mund të merret si një zgjidhje e veçantë e tij. Prandaj zgjidhja e përgjithshme është:

$$X^* = \Phi X^* + Z \;\Rightarrow\; X^* = \frac{Z}{1-\Phi} \qquad \text{për } \Phi \neq 1$$

Në disa raste, Neusser (2008), është e përshtatshme që të shkruhet ekuacioni johomogjen si një ekuacion homogjen duke marrë parasysh shmangiet nga gjendja e qëndrueshme, $X_t - X^*$:

$$X_t - X^* = \Phi(X_{t-1} - X^*) \tag{1.13}$$

Për të realizuar objektivin kryesor të studimit të ekuacioneve me diferenca, që është analiza e sjelljes së tyre rreth pikave të ekuilibrit, analizohet teoria e qëndrueshmërisë. Në kontekstin e ekuacioneve lineare të diferencave përkufizimet e mëposhtme, janë të mjaftueshme.

Përkufizimi 2. *Një pikë ekuilibri X^* quhet*

- *E qëndrueshme në qoftë se për çdo $\varepsilon > 0$, ka një $\delta_\varepsilon > 0$ e tillë që*
  $$\| X_0 - X^* \| < \delta_\varepsilon \quad sjell \quad \|X_t - X^*\| < \varepsilon \;\; \forall t > 0 \tag{1.14}$$
  Në qoftë se X^* është jo e qëndrueshme quhet e paqëndrueshme.
- *Pika X^* quhet tërheqëse në qoftë se ekziston $\mu > 0$ e tillë që*
  $$\| X_0 - X^* \| < \mu \quad sjell \quad \lim_{t\to\infty} X_t = X^* \tag{1.15}$$
  Në qoftë se $\mu = \infty$, X^* quhet globalisht tërheqëse.
- *Pika X^* është e qëndrueshme në mënyrë asimptotike në qoftë se është edhe e qëndrueshme edhe tërheqëse. Në qoftë se $\mu = \infty$, X^* quhet globalisht e qëndrueshme në mënyrë asimptotike.*

Në këtë përcaktim $\|X\|$ jep normën e $X \in R^n$. Në qoftë se *n=1* norma zëvendësohet nga vlera absolute e X, Robbin (1971), Champsaur et. al., (1997), Elaydi (2005).
Nëse te (1.9), Z_t është konstante dhe e barabartë me Z, zgjidhja e sipërme e veçantë merr formën

$$X_t^{(b)} = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^j X_{t-j} = \frac{Z}{1-\Phi} \tag{1.16}$$

e cila është zgjidhja e gjendjes së qëndrueshme e përshkruar në ekuacionin (1.12). Kushti që Z_t të qëndrojë e kufizuar, cënohet në qoftë se Z_t kënaq ekuacionin homogjen me diferenca $Z_t = \Phi Z_{t-1}$ i cili nënkupton se $Z_t = \Phi^t c$ për $c \neq 0$ dhe zgjidhja merr formën:

$$X_t^{(b)} = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^j \Phi^{t-j} c = \sum_{j=0}^{t-1} \Phi^t c = \infty \tag{1.17}$$

Kjo tregon se përveç kushtit të qëndrueshmerisë $|\Phi| < 1$, disa kushte të tjera, për sa i përket vargut të variablit ekzogjen, janë të nevojshme për të përftuar nga $X_t^{(b)}$ një zgjidhje të vaçantë.

Shqyrtohet rasti $|\Phi| > 1$. Barazimi i mësipërm nuk mund të përdoret sepse $X_t^{(b)}$ nuk mund të përcaktohet në ekuacionin (1.9) edhe në rastin kur X_t është konstante. Një mënyrë zgjidhjeje për këtë rast është shqyrtimi i barazimit para në kohë në vend që të shqyrtohet ai mbrapa në kohë:

$$X_t = \Phi^{-1}X_{t+1} - \Phi^{-1}Z_{t+1}$$

$$= \Phi^{-1}(\Phi^{-1}X_{t+2} - \Phi^{-1}Z_{t+2}) - \Phi^{-1}Z_{t+1} = \Phi^{-2}X_{t+2} - \Phi^{-2}Z_{t+2} - \Phi^{-1}Z_{t+1}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$= \Phi^{-H}X_{t+H} - \Phi^{-1}\sum_{j=1}^{H}\Phi^{-j+1}Z_{t+1} \qquad për\ H \geq 1 \tag{1.18}$$

Nëse merret norma e diferencës ndërmjet X_t dhe termit të dytë në anën e djathtë të ekuacionit arrihet në barazimin:

$$\left\|X_t + \Phi^{-1}\sum_{j=1}^{H}\Phi^{-j+1}Z_{t+1}\right\| = \|\Phi^{-H}X_{t+H}\| = \|\Phi^{-H}\|\|X_{t+H}\| \tag{1.19}$$

Duke qëne se në ekonomi, nuk ka periudhë fundi, barazimi i mëtejshëm mund të nxirret i papërcaktuar në të ardhmen. Nëse $|\Phi| > 1$ ana e djathtë e ekuacionit konvergjon në zero kur $H \to \infty$, me kusht që X_{t+H} të ngelet e kufizuar dhe atëherë merret zgjidhja e mëposhtme:

$$X_t^{(f)} = -\Phi^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}\Phi^{-j+1}Z_{t+j} \tag{1.20}$$

Ku (f) tregon se zgjidhja u përftua duke e spostuar dhe barazuar ekuacionin me diferenca në kohë. Që kjo të jetë një zgjidhje me kuptim, shuma në infinit duhet të jetë e mirëpërcaktuar dhe kërkon që Z_t të mbetet e kufizuar Levy et. al. (1961), Neusser (2008).

Nëse $|\Phi| = 1$ as strategjia e barazimit të mëparshëm dhe as e të mëtejshmit nuk çon në zgjidhje edhe nëse Z_t mbetet konstante dhe $Z_t \neq 0$. Pika e ekuilibrit nuk ekziston për $\Phi = 1$ dhe ekziston për $\Phi = -1$, por X_t luhatet ndërmjet X_0 dhe $-X_0 + Z$ kështu që pika e ekuilibrit është jo e qëndrueshme.

Analiza e qëndrueshmërisë bën të nevojshme shqyrtimin e dy zgjidhjeve të përgjithshme:

$$X_t = \Phi^t c_b + X_t^{(b)}\ , \qquad \text{ku}\quad X_t^{(b)} = \sum_{j=0}^{\infty}\Phi^j Z_{t-j} \tag{1.21}$$

$$X_t = \Phi^t c_f + X_t^{(f)} \qquad \text{ku}\quad X_t^{(f)} = -\Phi^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}\Phi^{-j} Z_{t+j} \tag{1.22}$$

Ku $c_b = X_0 - X_0^b$ dhe respektivisht $c_f = X_0 - X_0^f$. Në varësi të vlerave që merr Φ, na paraqitet situata e mëposhtme:

$|\Phi| < 1$: zgjidhja e mëparshme është asimptotikisht e qëndrueshme në kuptimin që X_t i afrohet $X_t^{(b)}$ kur $t \to \infty$. Çdo devijim i $X_t$nga $X_t^{(b)}$ zhduket në kohë, pavarësisht nga vlera e zgjedhur për c_b. Zgjidhja e mëtejshme zakonisht nuk ka kuptim pasi $X_t^{(f)}$ nuk qëndron e kufizuar edhe nëse variabli i fiksuar Z_t ngelet konstant në kohë.

$|\Phi| > 1$: të dyja zgjidhjet divergjojnë për shkak të termit Φ^t. Madje edhe devijime të vogla nga $X_t^{(b)}$ ose $X_t^{(f)}$ do të rriten pa kufizime. Megjithatë, ka një zgjidhje e cila mbetet e kufizuar. Ajo arrihet për $c_f = 0$, që do të thotë se X_t e ka gjithmonë vlerën e ekuilibrit $X_t^{(f)}$.

$|\Phi| = 1$: as zgjidhja e mëparshme dhe as ajo e mëtejshme, nuk konvergjojnë për $Z_t \neq 0$ dhe konstante.

Për të vendosur se cila zgjidhje është konstante duhet të shqyrtohet problemi ekonomik dhe natyra e tij Mickens (1987). Në veçanti, zgjedhja e kushtit kufizues kërkon mendime shtesë dhe nuk mund të përcaktohet në kushte të përgjithshme.

1.1.3 Ekuacionet me diferenca të rendit *p*

Ekuacioni homogjen i rendit *p* ka formën:

$$X_t = \Phi_1 X_{t-1} + \Phi_2 X_{t-2} + \cdots \Phi_p X_{t-p}, \qquad \Phi_p \neq 0 \tag{1.23}$$

Zgjidhja e përgjithshme e tij, do të jetë e së njëjtës formë si në rastin e rendit të parë, domethënë e formës $c\lambda^t,\ c \neq 0$. Duke përdorur këtë hamendësim tek ekuacioni homogjen (1.23), merret:

$$c\lambda^t = \Phi_1 c\lambda^{t-1} + \Phi_2 c\lambda^{t-2} + \cdots + \Phi_p c\lambda^{t-p} \tag{1.24}$$

ku pas lënies jashtë të c-së, pjesëtuar me λ^t dhe duke zëvendësuar z me $\frac{1}{\lambda}$:

$$1 - \Phi_1 z - \Phi_2 z^2 - \cdots - \Phi_p z^p = 0 \tag{1.25}$$

i cili është ekuacioni karakteristik i ekuacionit homogjen (1.23). Si rrjedhim, që $c\lambda^t$ të jetë zgjidhja e ekuacionit homogjen $z = \frac{1}{\lambda}$ duhet të jetë rrënjë e ekuacionit karakteristik (1.25) Meyer (2000) ,Patula (1979).

Fakti që $\Phi_p \neq 0$ do të thotë se asnjë nga rrënjët karakteristike nuk është e barabartë me zero. Nga Teorema themelore e algjebrës, dihet se ka p rrënjë të mundshme komplekse të ekuacionit karakteristik të shënuara $z_1,\ldots..z_p$ me shumëfishitete koresponduese $\lambda_1, \ldots. \lambda_p$. Në rastin e parë standart kur të gjitha rrënjët p janë të ndryshme ka vend teorema dhe lemat e mëposhtme të

shqyrtuara dhe përgjithësuara nga mjaft studjues Meyer (2000), Elaydi (2005), Klaus, N.(2008) e të tjerë të cilët shqyrtojnë kushtet e qëndrueshmërisë lidhur me natyrën e problemeve ekonomike.

Teorema 1. *Nëse të gjitha rrënjët e ekuacionit karakteristik janë të ndryshme, bashkësia* $\{\lambda_1^t, \dots \lambda_p^t\}$ *formon një bashkësi themelore të zgjidhjeve.*

Teorema nënkupton se zgjidhja e përgjithshme e ekuacionit homogjen $X_t^{(g)}$ jepet nga:

$$X_t^{(g)} = c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t + \cdots + c_p\lambda_p^t \tag{1.26}$$

Kur ekuacioni karakteristik ka r rrënjë $z_1,\dots..z_r$, me shumëfishitete përkatese m_r, ku $r < p$ shënohet ekuacioni homogjen me diferenca me termat e operatorit lag:

$$\left(1 - \Phi_1 L - \cdots - \Phi_p L_p\right)X_t = (1-\lambda_1 L)^{m_1}(1-\lambda_2 L)^{m_2} \dots (1-\lambda_r L)^{m_r} X_t = 0 \tag{1.27}$$

ku $\lambda_i, 1 < i < r$ është e barabartë me $\frac{1}{z_i}$. Nëse ψ_t është zgjidhje e

$$(1-\lambda_i L)^{m_i}\psi_t = 0 \tag{1.28},$$

atëherë është zgjidhje edhe e (1.27) dhe $\{\mathcal{G}_i = \lambda_{i,}^t t\lambda_{i,}^t t^2\lambda_{i,}^t \dots, t^{m_i-1}\lambda_i^t\}$ është një bashkësi themelore e zgjidhjeve të ekuacionit (1.28), të cilën e vërteton Lema 1.

Lema 1. *Për çdo k*≥ 1

$$(1-L)^k t^s = 0, \qquad 0 \le s < k \tag{1.29}$$

Vërtetim. Aplikimi i operatorit $1 - L$ tek t^s çon në një polinom të rendit $s - 1$, sepse termi t^s largohet dhe vetëm termat e një rendi më të vogël se s ngelen. Përdorimi përsëri i $1 - L$ zvogëlon rendin e polinomit po me një. Së fundmi $(1 - L)^s t^s$ çon në një konstante. Prandaj $(1 - L)^{s+1} t^s = 0$.

Lema 2. *Bashkësia,*$\{\mathcal{G}_i = \lambda_{i,}^t t\lambda_{i,}^t t^2\lambda_{i,}^t \dots, t^{m_i-1}\lambda_i^t\}$ *përfaqëson një bashkësi themelore të zgjidhjeve të ekuacionit (1.29).*

Vërtetim. Nëse marrim $1 \le s \le m_i - 1$, atëherë

$$(1-\lambda_1 L)^{m_i} t^s \lambda_i^t = \lambda_i^t (1-L)^{m_i} t^s = 0 \tag{1.30}$$

sepse $(1-L)^{m_i}t^s = 0$ sipas Lemës 1. Atëherë $t^s\lambda_i^t$ është zgjidhje e (1.29). Bashkësia $\mathcal{G}_i$ është linearisht e pavarur sepse bashkësia $\{1, t, t^2, \dots., t^{m_i-1}\}$ është linerisht e pavarur.
Është e qartë se $\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{G}_i$ është një bashkësi themelore e zgjidhjeve të ekuacionit (1.27). Zgjidhja e përgjithshme është:

$$X_t = \sum_{i=1}^{r}(c_{i0} + c_{i1}t + c_{i2}t^2 + \cdots + c_{i,m_i-1}t^{m_i-1})\lambda_i{}^t \tag{1.31}$$

Analiza e sjelljes së limituar mund të shqyrtohet te ekuacioni homogjen i rendit të dytë:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = 0. \qquad \phi_2 \neq 0 \tag{1.32}$$

Ekuacioni karakteristik korespondues në këtë rast do të jepej sipas ekuacionit kuadratik:

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 = 0 \tag{1.33}$$

Zgjidhja e ekuacionit duke marrë $\lambda = \frac{1}{z}$ është

$$\lambda_{1,2} = \frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2} \tag{1.34}$$

e cila dikton sjelljen cilësore të X_t, në tre raste:

A) λ_1 dhe λ_2 janë reale dhe të ndryshme: Zgjidhja e përgjithshme jepet nga

$$X_t = c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t = \lambda_1^t\left[c_1 + c_2(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^t\right] \tag{1.35}$$

B) $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Në këtë rast $(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^t \to 0$ kur $t \to \infty$. Kjo do të thotë se X_t varet asimptotikisht nga rrënja më e madhe λ_1:

$$\lim_{t\to\infty} X_t = \lim_{t\to\infty} c_1 \ \lambda_1^t \tag{1.36}$$

Në varësi të vlerës së λ_1 shfaqen gjashtë raste të ndryshme:

$B1$) $\lambda_1 > 1$: $c_1\lambda_1^t$ divergjon në ∞ kur $t \to \infty$.Sistemi është i paqëndrueshëm.

$B2$) $\lambda_1 = 1$:$c_1\lambda_1^t$ mbetet konstante dhe e barabartë me c_1.

B3) $0 < \lambda_1 < 1$: $c_1\lambda_1^t$ ulet monotonisht në zero. Sistemi është i qëndrueshëm.

B4) $-1 < \lambda_1 < 0$:$c_1\lambda_1^t$ luhatet rreth zeros, duke ndryshuar shenjë, po konvergjon në zero.

B5) $\lambda_1 = -1$:$c_1\lambda_1^t$ alternohet midis vlerave c_1 dhe $-c_1$.

B6) $\lambda_1 < -1$: $c_1\lambda_1^t$ alternohet në shenjë, por në vlerë absolute divergjon në ∞.

Sjellja e X_t në të gjitha rastet është e ilustruar në Figurën 1.2 Kulenovic (2003), Neusser, 2008).

C) Rrënjët e barabarta: .$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ dhe sipas (1.31) zgjidhja jepet me anë të

$$X_t = (c_1 + c_2 t)\lambda^t. \tag{1.37}$$

Nëse,

C1) $\lambda \geq 1$, X_t divergjon monotonisht.
C2) $\lambda \leq -1$, X_t divergjon duke alternuar shenjat.
C3) Për $|\lambda| < 1$, zgjidhja konvergjon në zero, sepse $\lim_{t\to\infty} t\ \lambda^t$=0.

Rrënjët komplekse: Dy rrënjët janë komplekse të konjuguara $\lambda_1 = a + i\beta$ dhe $\lambda_2 = a - i\beta$ ku $\beta \neq 0$. Duke përdorur koordinatat polare ato mund të shkruhen $\lambda_1 = r^{\,i\theta}$, kurse $\lambda_2 = r^{\,-i\theta}$, ku

$r = \sqrt{a^2 + \beta^2}$ dhe $\theta = \tan^{-1}(\beta/a)$. Zgjidhja jepet

$$X_t = c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t = c_1(a + i\beta)^t + c_2(a - i\beta)^t \tag{1.38}$$

$$= c_1 r^t e^{\,i\theta t} + c_2 r^t e^{-i\theta t}$$

$$= r^t[\, c_1(\cos(\theta t) + i\sin(\theta t)) + c_2(\cos(\theta t) - i\sin(\theta t))]$$

$$= r^t[(\, c_1 + c_2)\cos(\theta t) + i(\, c_1 - c_2)\sin(\theta t)]$$

Meqë $X_t$duhet të jetë numër real, $c_1 + c_2$ duhet të jetë gjithashtu real, kurse $c_1 - c_2$ duhet të jetë imagjinar. Kjo nënkupton se c_1 dhe c_2 duhet të jenë komplekse të konjuguara. Në koordinata polare, ato mund të shkruhen $c_1 = \rho e^{-i\omega}$ për ρ dhe ω. Duke i zëvendësuar te ekuacioni më sipër përftojmë:

$$X_t = \rho r^t\left[e^{\,i(\theta t+\omega)} + e^{-\,i(\theta t+\omega)}\right] = 2\rho r^t\cos(\,\theta t + \omega) \tag{1.39}$$

Zgjidhja është e luhatshme. Në varësi të vendndodhjes së rrënjëve të konjuguara, dallohen tre raste:

1. $r > 1$: Të dyja rrënjët janë jashtë rrethit njësi. X_t luhatet, por me amplitudë përherë rritëse. Sistemi nuk është i qëndrueshëm.

2. $r = 1$: Të dyja rrënjët janë në rrethin njësi. X_t luhatet, por me amplitudë konstante.

3. $r < 1$: Të dyja rrënjët janë brenda rrethit njësi, e në këtë rast zgjidhja luhatet, por me amplitudë monotonisht zbritëse dhe konvergjon në zero kur $t \to \infty$. Sistemi është i qëndrueshëm.

Figura 1.3 i ilustron të treja rastet.

Përfundimet e mësipërme përmblidhen në teoremën e mëposhtme:

Teorema 2. *Pohimi i mëposhtëm është i vlefshëm në rastin e ekuacionit diferencial homogjen linear të rendit të dytë (1.32):*
Të gjitha zgjidhjet luhaten rreth zeros atëherë dhe vetëm atëherë kur ekuacioni nuk ka rrënjë karakteristike reale pozitive.
Të gjitha zgjidhjet konvergjojnë në zero(p.sh. zeroja është një gjendje asimptotikisht e qëndrueshme) atëherë dhe vetëm atëherë kur max$\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$.

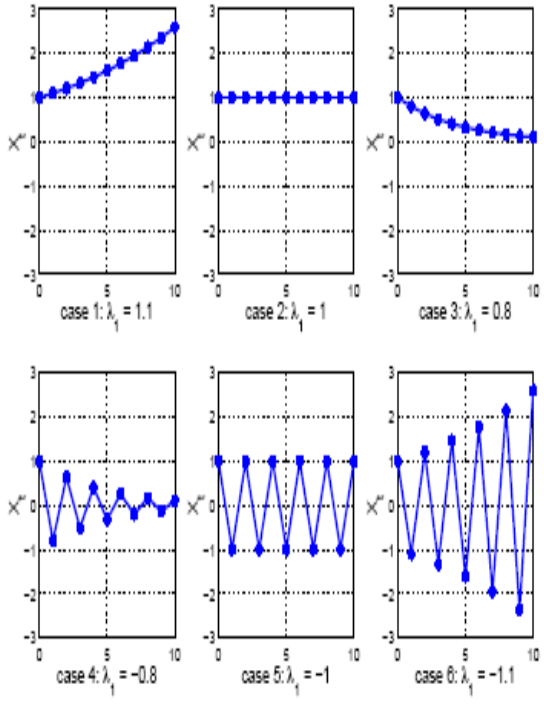


Figura 1.2: Sjellja e $X_t = \lambda_1^t$ ku $\lambda \in R$
Burimi: Neusser (2008)

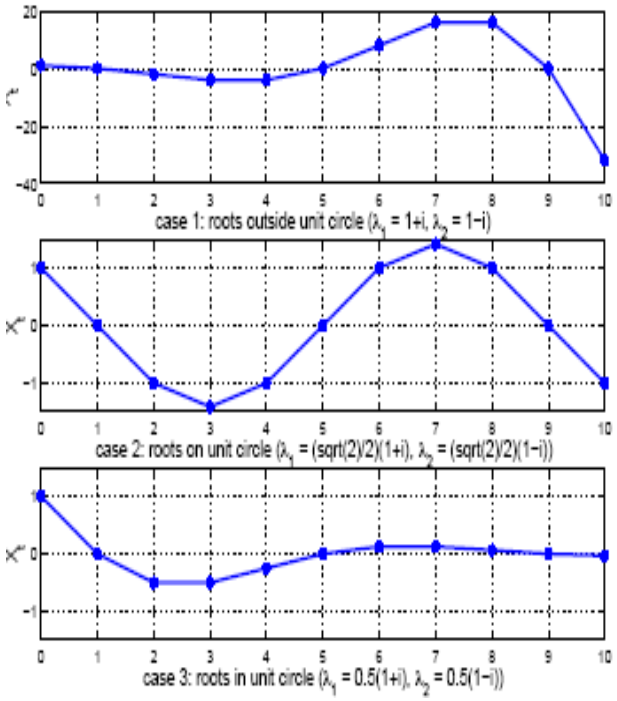


Figura 1.3: Sjellja e X_t në rastin e rrënjëve komplekse

Edhe pse sjellja kufizuese e X_t kuptohet më lehtë në termat e rrënjëve të ekuacioneve karakteristike, është më e volitshme të analizohen cilësitë e ekuacionit me diferenca në termat e parametrit origjinal ϕ_1 dhe ϕ_2. Prandaj shqyrtohet një ekuacion me diferenca johomogjen i rendit të dytë ku pjesa johomogjene është thjesht një konstante Z:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z \tag{1.40}$$

Zeroja nuk është më pikë ekuilibri. Në vend të saj, pika e ekuilibrit X^* gjendet duke zgjidhur ekuacionin:

$$X^*=\phi_1 X^* + \phi_2 X^* + Z \Longrightarrow X^* = \frac{Z}{1-\phi_1-\phi_2} \tag{1.41}$$

Ekuilibri ekziston vetëm nëse $1-\phi_1-\phi_2 \neq 0$. Ky kusht është i njëvlershëm me kushtin që 1 nuk mund të jetë rrënjë. Meqë gjendja e qëndrueshme ka vlerë për një zgjidhje të caktuar të ekuacionit (1.40), zgjidhja e përgjithshme mund të jepet:

$$X_t=X^* + X_t^{(g)} \tag{1.42}$$

Si rrjedhim X_t konvergjon në ekuilibrin e saj vetëm nëse $X_t^{(g)}$konvergjon në zero kur$t \to \infty$.Për më tepër, zgjidhja luhatet rreth X^*atëherë dhe vetëm atëherë kur $X_t^{(g)}$ luhatet rreth zeros. Bazuar në teoremën e mësipërme jepet kjo teoremë:

Teorema 3. *Në qoftë se* $1-\phi_1-\phi_2 \neq 0$, *atëherë:*

Të gjitha zgjidhjet e ekuacionit johomogjen (1.40) luhaten rreth pikës së ekuilibrit X^**atëherë dhe vetëm atëherë kur ekuacioni karakteristik nuk ka rrënjë karakteristike reale pozitive.*

Të gjitha zgjidhjet e ekuacionit johomogjen (1.40) konvergjojnë në X^**atëherë dhe vetëm atëherë kur* $\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|\} < 1$.

Teorema 4. *Pika e ekuilibrit* X^* *është asimptotikisht e qëndrueshme (të gjitha zgjidhjet konvergjojnë në* X^**) atëherë dhe vetëm atëherë kur plotësohen këto tre kushte:*

$$1-\phi_1-\phi_2 > 0$$
$$1+\phi_1-\phi_2 > 0$$
$$1+\phi_2 > 0$$

Vërtetim. X^* është asimptotikisht i qëndrueshëm në pikën e ekuilibrit. Sipas teoremës së mëparshme kjo do të thotë se $\lambda_1$dhe λ_2 duhet të jenë më të vogla se një në vlerë absolute. Sipas ekuacionit (1.39) kjo do të thotë

$$|\lambda_1| = \left|\frac{\phi_1+\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}}{2}\right| < 1 \quad \text{dhe} \quad |\lambda_2| = \left|\frac{\phi_1-\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}}{2}\right| < 1 \tag{1.43}$$

Duhet të dallohen dy raste.

Rrënjët reale: $\phi_1^2 + 4\phi_2 > 0$. Kjo çon në mosbarazimet e mëposhtme:

$$-2<\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}<2 \tag{1.44}$$

$$-2 -\phi_1<+\sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}<2-\phi_1 \tag{1.45}$$

$$-2 - \phi_1<-\sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}<2-\phi_1 \tag{1.46}$$

Ngritja në katror e mosbarazimit e parë, $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 4 - 4\phi_1 + \phi_1^2$ çon te kushti i parë. Në mënyrë të ngjashme veprohet me mosbarazimin e dytë: $4 + 4\phi_1 + \phi_1^2 > \phi_1^2 + 4\phi_2$ i cila rezulton në kushtin e dytë. Pohimi se $|\lambda_1| < 1$ do të thotë se $|\lambda_1\lambda_2| = |-\phi_2| < 1$ dhe kjo çon te kushti i tretë.

Rrënjët komplekse: $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$, nëse $0 < \phi_1^2 < -4\phi_2$. Si rrjedhim

$$4(1 - \phi_1 - \phi_2) > 4 - 4\phi_1 + \phi_1^2 = (2 - \phi_1)^2 > 0 \tag{1.47}$$

Kjo është e njëvlerëshme me kushtin e parë. Në mënyrë të ngjashme

$$4(1 + \phi_1 - \phi_2) > 4 - 4\phi_1 + \phi_1^2 = (2 - \phi_1)^2 > 0 \tag{1.48}$$

është e njëvlershme me kushtin e dytë. Në mënyrë që të përftohet kushti i tretë, dy rrënjët e konjuguara komplekse duhet të jepen si më poshtë:

$$\lambda_1 = \frac{\phi_1}{2} + \frac{\iota}{2}\sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} \text{ dhe } \lambda_2 = \frac{\phi_1}{2} - \frac{\iota}{2}\sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}$$

sepse $|\lambda_1| < 1$ dhe $|\lambda_2| < 1$, atëherë $|\lambda_1\lambda_2| = |-\phi_2| < 1$ që është kushti i tretë.
Nëse plotësohen të tria kushtet, rezulton $-2 < \phi_1 < 2$ dhe $-1 < \phi_2 < 1$ dhe kur rrënjët janë reale atëherë

$$-1 < \frac{-2+\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}}{2} < \lambda_1 = \frac{\phi_1+\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}}{2} < \frac{\phi_1+\sqrt{\phi_1^2+4-4\phi_1}}{2} = \frac{\phi_1+\sqrt{(2-\phi_1)}}{2} = \frac{\phi_1-\phi_1+2}{2} = 1 \tag{1.50}$$

Në mënyrë të ngjashme:

$$-1 < \frac{2-\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}}{2} < \lambda_1 = \frac{\phi_1-\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}}{2} < \frac{\phi_1-\sqrt{\phi_1^2+4-4\phi_1}}{2} = \frac{\phi_1-\sqrt{(2-\phi_1)}}{2} = \frac{\phi_1-\phi_1-2}{2} = -1 \tag{1.51}$$

Nëse rrënjët janë komplekse, λ_1 dhe λ_2 janë numra kompleksë të konjuguar, moduli i tyre i ngritur në katror do të jetë i barabartë me $\lambda_1\lambda_2 = \frac{\phi_1^2 - \phi_1^2 + 4\phi_2}{4} = -\phi_2$.
Meqë $-\phi_2$<1, moduli i λ_1 dhe λ_2 është më i vogël se një.

Tre kushtet e mësipërme përcaktojnë një trekëndësh me kulme që jepen nga (-2,-1), (0,1) dhe (2,-1) në planin $\phi_1 - \phi_2$. Pikat brenda trekëndëshit përcaktojnë një gjendje asimptotikisht të qëndrueshme, kurse pikat jashtë trekëndëshit çojnë në një gjendje të paqëndrueshme. Parabola $\phi_1^2 + 4\phi_2 = 0$ përcakton zonën e rrënjëve komplekse. Vlerat e $\phi_1$dhe ϕ_2 sipër parabolës të çojnë në rrënjë reale, kurse vlerat poshtë parabolës në rrënjë komplekse.

1.2 Sistemet e ekuacioneve lineare me diferenca

Studimi i sistemeve të ekuacioneve lineare të diferencave, Galor (2007), Ravi P. et.al.(2013), Thomas J.W. (1995), Tiryaki,A., Misir,A.(2008), Kailath, T.(1980), merr rëndësi të veçantë pasi procesi i diskretizimit krijon mundësinë që për probleme të ndryshme të arrihet në sisteme të tilla. Për çdo variabël $X_{1t},\ldots,\ X_{nt},\ n \geq 1$, jepet një ekuacion me diferenca johomogjen i rendit p. Këto variabla formojnë një sistem, i cili paraqitet në trajtë matricore:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t\ , \qquad \phi_p \neq 0 \tag{1.52}$$

ku, Z_t është një n-vektor i variablave ekzogjenë dhe ku ϕ_i, $i = 1,2,\ldots,p$, është një matricë

$$\phi_i = \left(\phi_{i,j}^{(i)}\right)_{i,j=1,2,\ldots,n} \text{për } i = 1,2,\ldots,p. \tag{1.53}$$

Çdo sistem i rendit p mund të shkruhet si një sistem i rendit të parë, duke përcaktuar një variabël të ri Y_t. Sistemi i rendit të parë paraqitet në trajtë matricore:

$$Y_t = \phi\, Y_{t-1} + Z_t \tag{1.54}$$

ku $Z_t = (Z_t^{'}\ \ 0\ \ 0\ldots 0\ \ 0\ )^{'}$. I_n është matricë e rendit n. Matrica ϕ me përmasa np x np është matrica shoqëruese e (1.52). Në këtë mënyrë studimi i sistemit të rendit p gjithmonë mund të reduktohet në një sistem të rendit të parë.

1.2.1 Sistemet homogjenë të ekuacioneve me diferenca të rendit të parë

Duke qëne se sistemet e rendit *p* të ekuacioneve të diferencave sillen në sisteme të rendit të parë, analiza e tyre mund të reduktohet në shqyrtimin e sistemit në trajtën:

$$X_t = \phi\, X_{t-1} + Z_t \qquad \phi_p \neq 0 \tag{1.55}$$

ku X_t është një n-vektor dhe ϕ një matricë nxn. n-vektori Z_t është vektor i variablave ekzogjenë dhe ϕ supozohet të ketë të anasjelltë.
Sistemi homogjen, në të cilin vlera fillestare jepet nga vektori $X_0 = x_0$

$$X_t = \phi X_{t-1} \tag{1.56}$$

të gjitha vlerat e X_t i ka të përcaktuara në mënyrë të vetme e në veçanti ,

$$X_0 = \phi^t x_0 \tag{1.57}$$

Në ngjashmëri me ekuacionet përcaktohet varësia dhe pavarësia lineare e zgjidhjeve së sistemeve, të dhëna më poshtë nga Elaydi (2005), Klaus, N.(2008):

Lema 3. *Nëse* det $C(t)$ i n *vargjeve* $(X^{(i)})$, $1 \leq i \leq n$, *është i ndryshëm nga zero për të paktën një* $t_0 \geq 0$, *atëherë* $(X^{(i)})$, $1 \leq i \leq n$ *janë linearisht të pavarura për* $t \geq 0$.

Vërtetim. Supozojmë se $(X^{(i)})$, $1 \leq i \leq n$ është linearisht i varur.Atëherë ekziston një vektor i ndryshëm nga 0 i tillë që $C_t c = 0$ për të gjitha $t \geq 0$. Por kjo është në kundërshtim me pohimin det$C(t_0) \neq 0$. Duhet patur parasysh që e anasjellta nuk është e vërtetë dhe kjo shihet nga shembulli i mëposhtëm: $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ dhe $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$. Këto dy vargje janë linearisht të pavarur, por $detC(t) = 0$ për çdo $t \geq 0$.

Lema 4. *Nëse* $(X^{(i)})$, $1 \leq i \leq n$, *janë n zgjidhje linearisht të pavarura të sistemit homogjen (1.12), atëherë* $detC(t) \neq 0$ *për çdo* $t \geq 0$.

Vërtetim. Supozojmë se ekziston një t_0 e tillë që $detC(t_0) = 0$. Kjo do të thotë se ekziston një vektor c i ndryshëm nga zero ku $C(t_0)c = \sum_{i=1}^{n} c_i X_t^{(i)} = 0$. Meqë $X_t^{(i)}$ janë zgjidhje atëherë dhe $C(t_0)c = \sum_{i=1}^{n} c_i X_t^{(i)} = Y_t$ është zgjidhje. Kur Y_{t0}=0 edhe $Y_t = 0$ për çdo t për shkak të unicitetit të zgjidhjeve. Meqë zgjidhjet janë linearisht të pavarura c duhet të jetë e barabartë me 0 gjë që është në kundërshtim me kushtin $c \neq 0$. Teoremat e mësipërme kombinohen për të dhënë teoremën e mëposhtme Elaydi (2005), Neusser (2008):

Teorema 5. *Zgjidhjet* $(X^{(i)})$, $1 \leq i \leq n$, *të sistemit homogjen janë linearisht të pavarura për* $t \geq 0$ *atëherë dhe vetëm atëherë kur ekziston* $t_0 \geq 0$, *e tillë që* det$C(t_0) \neq 0$.

Teorema e mësipërme nënkupton se n zgjidhjet $U_t^{(1)}, \ldots, U_t^{(n)}$ e sistemit homogjen (1.56) që kënaqin kushtet fillestare

$$U_0^{(i)} = e^{(i)} = (0 \dots 0 \quad 1 \quad 0 \dots 0)', \qquad 1 \leq i \leq n \tag{1.58}$$

janë linearisht të pavarura. Si rrjedhim ekzistojnë të paktën n zgjidhje linearisht të pavarura.
Le të supozohet se jepet çdo zgjidhje e sistemit homogjen (1.12). Atëherë është e thjeshtë të vërehet se $X_t$mund të shprehet në formën $X_t = \sum_{i=1}^{n} X_{i,0} U_t^{(i)}$ ku $U_t^{(i)}$ është zgjidhje e sistemit homogjen (1.56) dhe plotëson kushtin fillestar (1.58). Meqë zgjidhjet janë të përcaktura në mënyrë të vetme, atëherë hapësira e zgjidhjeve të sistemit (1.56) është hapësirë lineare e rendit n. Si rrjedhim, çdo zgjidhje mund të shkruhet

$$X_t = \sum_{i=1}^{n} X_{i,0} U_t^{(i)} = U(t) X_0 \tag{1.59}$$

ku $U(0) = I_n$, matricë me përmasa$n$ x n dhe $U(t)$=$(U_t^{(1)}, \dots, U_t^{(n)})$.
Për shkak se çdo shtyllë e $U(t)$është zgjidhje për sistemin homogjen (1.56), $U(t)$ kënaq sistemin matricor linear homogjen:

$$U(t+1) = \phi\, U(t) \tag{1.60}$$

Kjo çon në përkufizimin e mëposhtëm:

Përkufizimi 7. *Çdo matricë $U(t)$ n x n e cila nuk është njësi për çdo $t \geq 0$ dhe e kënaq sistemin matricor (1.60) quhet matricë fondamentale ose bazë. Nëse matrica përmbush dhe kushtin $U(0) = I_n$ atëherë ajo quhet matricë kryesose fondamentale.*

Nëse $V(t)$ është një matricë themelore atëherë $U(t) = V(t)V^{-1}(0)$ është matrica kryesore themelore. Nëse $V(t)$është një matricë themelore, atëherë edhe $V(t)C$ është gjithashtu një matricë themelore ku C përfaqëson çdo matricë jo njësi. Kjo do të thotë se ka një pafundësi matricash themelore për një sistem matricor homogjen të dhënë. Megjithatë, ekziston vetëm një matricë kryesore themelore sepse ekuacioni matricor me diferenca (1.60) përcakton në mënyrë të vetme të gjitha matricat gjatë iteracionit kur jepet një matricë e dhënë. Në rastin e një matrice themelore kryesore matrica fillestare është matrica njësi. Duke patur parasysh se $U(t)$ është një matricë themelore kryesore, zgjidhja e sistemit homogjen merr formën :

$$X_t = U(t)c = \phi^t c \tag{1.61}$$

ku c $\in$ R^nështë një vektor konstant. Në mënyrë që të gjendet zgjidhja e përgjithshme e sistemit homogjen (1.56) dhe të kuptohen cilësitë e tij, duhet të gjendet një shprehje për ϕ^t.
Një shprehje e tillë mund të përcaktohet me anën e vlerave dhe vektorëve vetjakë të matricës ϕ .
Shqyrtojmë rastin kur vlerat e vetjake janë të ndryshme. Nëse të gjitha vlerat vetjake $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ të ϕ janë të ndryshme atëherë matrica është e diagonalizueshme dhe ekziston një matricë P e tillë

që $P^{-1}\phi P = \Lambda$ ku Λ =diag$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Shtyllat e P janë vektorët vetjakë të ϕ. Me transformime të njëpasnjëshme mund të llogaritet ϕ^t:

$$\phi^t = P^{-1}\Lambda^t P \tag{1.62}$$

Në rastin e vlerave vetjake të ndryshme vërtetohet teorema e mëposhtme.

Teorema 6. Nëse *spektri i* ϕ, $\sigma(\phi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, *përbëhet nga n vlera të veta të ndryshme me vektorë korespondues* p_i , $i = 1 \dots . n$, *atëherë bashkësia*

$$X_t^{(i)} = p_i \lambda_i^t, \qquad i= 1, \dots, n \tag{1.63}$$

përfaqëson një bashkësi themelore zgjidhjesh të sistemit (1.56).

Vërtetim: Meqë p_i është vektori vetjak i ϕ që i korespondon λ_i, ka vend:

$$X_{t+1}^{(i)} = p_i \lambda_i^{t+1} = \lambda_i p_i \lambda_i^t \; = \; \phi p_i \lambda_i^t = \phi \; X_t^{(i)}, t \geq 0 \tag{1.64}$$

Atëherë $X_t^{(i)}$, $i= 1, \dots, n$ janë zgjidhje të sistemit homogjen (1.56). Gjithashtu matrica përkatëse Casatorian e llogaritur për *t = 0* është $detC(0) = \det(p_1, \dots p_n) = detP \neq 0$ sepse P përbëhet nga *n* vektorë vetjakë të pavarur dhe është në këtë mënyrë jo njësi. Atëherë sipas Teoremës 6 këto zgjidhje janë linearisht të pavarura.

Zgjidhja e përgjithshme e sistemit homogjen (1.56) mund të shkruhet:

$$X_t = \sum_{i=1}^{n} c_i \, p_i \lambda_i^t \qquad t \geq 0 \tag{1.65}$$

për disa konstante $c_1, \dots . c_n$.
Një tjetër mënyrë për të kuptuar rezultatin e Teoremes 6 është duke vëzhguar se sistemi i *n* ekuacioneve mund të reduktohet në një ekuacion me diferenca të rendit të parë. Ky reduktim arrihet nga transformimi me variabla transformimi $Y_t = P^{-1} \; X_t$:

$$Y_{t+1} = P^{-1} \; X_{t+1} = \; P^{-1}\phi P \; P^{-1} \; X_{\;t} = \Lambda Y_t \tag{1.66}$$

Me anë të këtyre transformimeve janë përftuar *n* ekuacione me diferenca të rendit të parë me një variabël të pavarur të formës së mëposhtme:

$$Y_{1,t+1} = \lambda_i \; Y_{1,t} \quad , \qquad i = 1, \dots, n \tag{1.67}$$

dhe si rrjedhim zgjidhja e përgjithshme e tyre jepet nga

$$Y_{1,t+1} = c_i \lambda_i^t, \qquad i = 1, \dots, n \tag{1.68}$$

Duke transformuar sistemin me anën e shumëzimit nga e majta e Y_t me P do merret zgjidhja e ekuacionit (1.65).

Nëse vlerat vetjake janë të përsëritura, situata bëhet më e ndërlikuar, megjithëse edhe në këtë rast ϕ mund të diagonalizohet. Kjo vlen për matricat simetrike, antisimetrike dhe matricat që kanë të anasjelltë.

Në rastin e përgjithshëm ku ϕ nuk diagonalizohet përdoret forma kanonike Jordan. Ortega (1987), Klaus, N. (2008). Për çdo matricë ϕ me vlera vetjake të ndryshme.

$\sigma\phi = \{\lambda_1 , \dots \lambda_n \}$ ekziston një matricë jo njësi P në mënyrë që ϕ të reduktohet në një matricë J me transformim të ngjashëm $P^{-1}\phi P = J$. Matrica J është matricë diagonale me elemente në diagonale $J(\lambda_i), i = 1, \dots s$ që janë blloqe matricore $J_j(\lambda_i), j = 1, \dots, t_i$.

Blloqet e Jordanit në vetvete janë të formës së mëposhtme:

$$J_j(\lambda_i) = \lambda_i \, I + N \tag{1.69}$$

ku,

$$\mathrm{N}= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.70}$$

Gjithashtu mund të paraqitet fuqia e *k*-të e matricës së dhënë nga shprehja $J_j(\lambda_i)^t = (\lambda_i + N)^t$ koeficentet e së cilës gjenden nga zbërthimi i binomit të Njutonit.

1.2.2 Sistemet johomogjene të ekuacioneve me diferenca të rendit të parë

Sistemi i rendit të parë johomogjen paraqitet në trajtë matricore

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t \tag{1.71}$$

dhe ashtu si në rastin një përmasor parimi i superpozimit mbetet i vërtetë edhe në rastin me shumë variabla. Nëse ekzistojnë dy zgjidhje për sistemin homogjen (1.71). ${X_t}^{(1)}$ dhe ${X_t}^{(2)}$, atëherë mund të provohet se ${X_t}^{(1)} - {X_t}^{(2)}$ është zgjidhje për sistemin homogjen (1.56). Sipas parimit të superpozimit, për një vektor c,

$$X_t^{(1)} - X_t^{(2)} = \phi^t c \tag{2.72}$$

Teorema 7. *Çdo zgjidhje* (X_t) *e sistemit të rendit të parë johomogjen (1.71) mund të shkruhet si shumë e zgjidhjeve të përgjithshme të sistemit homogjen (1.56),* $(X_t^{(g)})$*, dhe si një zgjidhje e veçantë e sistemit johomogjen (1.71).* $(X_t^{(p)})$*:*

$$X_t = X_t^{(g)} + X_t^{(p)} = \phi^t c + X_t^{(p)} \tag{1.73}$$

Një zgjidhje e veçantë mund të gjendet duke e zgjidhur në mënyrë iterative, por duke u nisur nga një vlerë fillestare X_0, ekuacionin me diferenca. Në këtë mënyrë

$$X_t^{(p)} = \sum_{j=0}^{t-1} \phi^j Z_{t-j} \tag{1.74}$$

do të jetë zgjidhje e veçantë. Prej këtej, zgjidhja e përgjithshme e ekuacionit johomogjen është

$$X_t = \phi^t c + \sum_{j=0}^{t-1} \phi^j Z_{t-j} \tag{1.75}$$

për problemin fillestar të vlerës $X_0 = x_0$, $c = x_0$. Problemi është që zgjidhjet nuk janë të sakta në rastin kur kemi të bëjmë me pritshmëri racionale. Meqë e sistemi shpërbëhet në *n* ekuacione me diferenca të rendit të parë me një variabël të pavarur, vendimi nëse do përdoret një zgjidhje të nisur nga vlerat fillestare ose një zgjidhje duke filluar me vlerat e zhvendosura në kohë varet në çdo rast nga venndodhja e vlerave vetjake. Në përgjithësi, do të merren ato vlera vetjake, të cilat janë më të vogla se një në vlere absolute dhe më të mëdha se një po në vlerë absolute. Si rrjedhim do të kemi një ndërthurje vlerash fillestare me vlera të shtyra në kohë.

1.3. Qëndrueshmëria e zgjidhjeve të sistemeve të ekuacioneve me diferenca

Objektivi kryesor i këtij kapitulli është studimi i qëndrueshmërisë së zgjidhjeve që çojnë në përcaktimin e pikës së ekuilibrit duke përcaktuar kritere për qëndrueshmërinë e sistemeve lineare homogjenë dhe johomogjenë dhe sistemeve dy-përmasore bazuar në përfundime të nxjerra nga algjebra lineare dhe kritere të qëndrueshmërisë nga linearizimi të studjuara nga Dannan et. al. (2004), Kelli (1991), Tiryaki,A., Misir,A. (2008), Smith, H.et. al.(1998) e të tjerë duke patur parasysh lidhjen midis operatorit diferencial dhe atij të diferencës.

1.3.1 Qëndrueshmëria e sistemeve lineare të rendit të parë

Nëse sistemi iekuacioneve me diferenca paraqitet në formën

$$X_{t+1} = f(X_t, t) \tag{1.76}$$

ku $f(x,t)$është një funksion i formës $R^n \times N \to R^n$ i cili është i vazhdueshëm në x. Përcaktohet pika e ekuilibrit $X^* \in R^n$ e tillë që

$$X^* = f(X^*, t) \qquad \forall t \geq 0. \tag{1.77}$$

Duke përdorur formën e sistemeve lineare johomogjenë dhe pikën e ekuilibrit përcaktohet gjendja e qëndrueshme me këtë ekuacion:

$$X^* = \Phi X^* + Z. \tag{1.78}$$

Në mënyrë që të ekzistojë vetëm një zgjidhje e vetme për ekuacionin, $I_n - \Phi$ duhet të ketë të anasjelltë. Si rrjedhim vlera absolute e vlerave vetjake Φ është e ndryshme nga 1. Gjendja e ekuilibrit jepet nga:

$$X^* = (I_n - \Phi)^{-1} + Z^6. \tag{1.79}$$

Ekuacioni johomogjen duhet që në shumë raste të shprehet si sistem homogjen me variabël X_t të devijuar nga gjendja e qëndrueshme:

$$X_{t+1} - X^* = \Phi(X_t - X^*) \tag{1.80}$$

Qëndrueshmëria e pikave të ekuilibrit lidhet me vlerat vetjaketë Φ , veçanërisht me rrezen e saj, $\rho(\Phi)$ shqyrtohet nëpërmjet lemës dhe teoremës së dhënë më poshtë nga Neuser (2008).

Lema 5: *Zgjidhja e sistemit homogjen është e qëndrueshme nëse ekziston $M > 0$ e tillë që*

$$\|\Phi^t\| \leq M \qquad \forall t \geq 0 \tag{1.81}$$

Teorema 8: *Për sistemin homogjen vlejnë pohimet e mëposhtme:*
Zgjidhja zero është e qëndrueshme atëherë dhe vetëm atëherë kur $\rho(\Phi) \leq 1$ dhe vlerat vetjake në rrethin njësi janë gjysmë të thjeshta.
Zgjidhja zero është asimptotikisht e qëndrueshme atëherë dhe vetëm atëherë kur $\rho(\Phi) < 1$.

Vërtetim. Sipas Lemës 1 duhet të vërtetohet se$\|\Phi^t\| \leq M$ për $M > 0$. Duke përdorur formën kanonike të Jordanit $\Phi = \mathrm{Q}^{\mathrm{J}}\mathrm{Q}^{-1}$, $\|\Phi^t\| = \|\mathrm{Q}^{\mathrm{J}}\mathrm{Q}^{-1}\| \leq M$. Prej këtëj rrjedh se ekziston një $M > 0$ e tillë që $\|J^t\| \leq M$. M mund të merret $M = \frac{\tilde{M}}{\|\mathrm{Q}^{\mathrm{J}}\|\,\|\mathrm{Q}^{-1}\|}$. Fuqia e J jepet nga fuqia e blloqeve të Jordanit. Fuqia e t-të e një blloku duke koresponduar me vlerat vetjake λ_i jepet :

$\boldsymbol{J_j}(\lambda_i)^{\boldsymbol{t}} = (\lambda_i + N)^{\boldsymbol{t}}$**,** e cila është një matricë trekëndëshe e sipërme me elemente që dalin nga zbërthimi sipas binomit të Njutonit.

Elementet e kësaj matrice nuk janë të kufizuara nëse $|\lambda_i| > 1$. Gjithashtu nëse $|\lambda_i|$=1 dhe $\boldsymbol{J_j}(\lambda_i)$ nuk është matricë 1x1. Kur ajo është e tillë $\boldsymbol{J}\ (\lambda_i)$ është matricë diagonale me njësha në diagonale dhe si rrjedhim është e kufizuar. Segmentet e Jordanit me vlera vetjake koresponduese $|\lambda_i| < 1$, konvergjojnë në zero.$\lim_{t\to\infty}\ t^k \lambda_i^{\boldsymbol{t}} = 0$ sipas rregullit të l'Hopitalit.

Ashtu si në rastin e ekuacioneve të rendit të parë me diferenca, për të analizuar qëndrueshmërinë e sistemeve jolineare do të përdoret përafrimi linear rreth gjendjes së ekuilibrit. Nëse X^* përfaqëson gjendjen e qëndrueshme dhe f është gjithmonë i diferencueshëm për x në një zonë të hapur të X^*, atëherë versioni i linearizuar i sistemit (1.80) do të jepet:

$$Y_{t+1} = X_{t+1} - X^* = \Phi_t Y_t + g(Y_t, t) = \Phi_t(X_t - X^*) + g((X_t - X^*), t) \tag{1.82}$$

ku Φ_t dhe $g((X_t - X^*), t)$ përcaktojnë matricën e Jakobit duke vlerësuar gjendjen e qëndrueshme dhe gabimin e përafruar. Nëse Φ_t dhe $g((X_t - X^*), t)$ janë të pavarur nga t merret një sistem autonom nëse f nuk varet nga t. Kjo do të ndodhte nëse variabli Z_t është konstant. Pohimi mbi diferencueshmërinë e f do të thotë se për çdo $\mathcal{E} > 0$ ekziston $\delta > 0$ e tillë që $\|g(Y_t, t)\| \leq \mathcal{E}\|Y\|$ kur $\|Y\| \leq \delta$.

1.3.2 Qëndrueshmëria e sistemeve lineare të rendit të dytë

Duke qenë se shumë modele ekonomike reduktohen në një sistem dy-përmasor është e domosdoshme të gjendet një kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm për stabilitetin asimptotik të zgjidhjes së sistemeve Dannan et. al., (2004), Kelly (1991), Shone (2002) e më vonë Elaydi (2005) dhe Neuser (2008) kanë nxjerrë përfundime dhe kritere të qarta për qëndrueshmërinë, duke u bazuar në vlerat vetjake të matricës dhe të përgjithësuara në teoremën e mëposhtme:

Teorema 9: *Sistemi homogjen dy-përmasor ka një zgjidhje asimptotikisht të qëndrueshme atëherë dhe vetëm atëherë kur*

$$|\mathrm{tr}(\Phi)| < 1 + \det\Phi < 2 \tag{1.83}$$

Pa u ndalur në vërtetimin e kësaj teoreme, e cila bazohet në përfundimet e mëparshme dhe në faktin se ekuacioni karakteristik është $\lambda^2 - (\mathrm{tr}\Phi) + \det\Phi = 0$ nxirret përfundimi se për sistemet e pavarura nga koha, vlerat e veta të Φ janë përcaktuese në cilësitë e qëndrueshmërisë së sistemit linear. Ndërsa për sistemet periodike vlerat vetjake të Φ nuk luajnë ndonjë rol në përcaktimin e cilësive të qëndrueshmërisë së sistemit.

Kriteret e gjetura për qëndrueshmërinë e zgjidhjes zero janë të njëjta për çdo pikë ekuilibri të ndryshme nga zero.

Duke marrë parasysh përfundimet e paragrafit 1.3.1 për sistemin $X_{t+1} = f(X_t, t)$ në dy rastet kur $(I_n - \Phi)$ ka të anasjelltë atëherë $X^* = 0$ është pika e vetme e ekuilibrit edhe në rastin kur $det(I_n - \Phi) = 0$ ka një bashkësi pikash ekuilibri. Në këtë rast me anën e zëvendësimit $Y_t = X_t - X^*$ përftohet sistemi $Y_{t+1} = \Phi\, Y_t$, i cili është identik me sistemin (1.76). Kështu cilësitë e qëndrueshmërisë në një pikë ekuilibri $X^* \neq 0$, janë të njëjta me ato të pikës $X^* = 0$.

1.3.3 Sistemet e ekuacioneve të rendeve të larta

Zgjidhja dhe analiza e qëndrueshmërisë për sistemet lineare kryhet lehtësisht nëse ato reduktohen në një formë më të thjeshtë Tiryaki, A., Misir,A.(2008), Sedaghat (2003), Agarwal (2013).
Konsiderojmë sistemin e ekuacioneve me diferenca

$$x(t+1) = A(t)x(t)\,, t = 0,1,2, \ldots \tag{1.84}$$

ku $A(t) = (a_{i,j}(t))$ është një matricë kxk, me vlera reale që ka të anasjelltë dhe

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots x_k(t))^T \epsilon R^k. \tag{1.85}$$

Nëse për $t_0 \geq 0$, $x(t_0) = x_0$ është specifikuar, atëherë zgjidhja me problemin e vlerave fillestare jepet nga:

$$x(t, t_0, x_0) = (\prod_{i=t_0}^{t-1} A(i))\, x_0 = \phi(t)x_0 \tag{1.86}$$

ku $\phi(t)$ është matrica themelore e përcaktuar në këtë mënyrë

$$\prod_{i=t_0}^{t-1} A(i) = \begin{cases} A(t-1)A(t-1) \ldots A(t_0) & \text{nëse } t > t_0 \\ I & \text{nëse } t = t_0 \end{cases} \tag{1.87}$$

Megjithatë (1.84) mund të reduktohet në ekuacionin e mëposhtëm:

$$y(t+1) = B(t)y(t) \tag{1.88}$$

Nëse ekziston një matricë $H(t)$ me vlera reale, që ka të anasjelltë e tillë që:

$$x(t) = H(t)y(t) \tag{1.89}$$

Le të jetë $S(t)$ një matricë kxk për $t > t_0$, sistemi

$$z(t+1) = S(t)z(t), t > t_0 \tag{1.90}$$

dhe $H(t)$ një matricë themelore e (1.90) që plotëson kushtin $H(t_0) = I$, e kështu $H(t)$ mund të përdoret për të bërë transformimin nga (1.84) te (1.88).
Cilësitë e qëndrueshmërisë për (1.84) rrjedhin nga forma e reduktuar e (1.88) duke vendosur disa kushte shtesë. Teorema në këtë pjesë përdoret për reduktimin nga (1.84) te (1.88) dhe më pas përftohet qëndrueshmëria asimptotike e zeros si zgjidhje e (1.84).
Teorema Tiryaki,A., Misir,A. (2008) në vijim është mbi strukturën e $S(t)$.

Teorema 10: *Sistemi linear homogjen me diferenca (1.84) mund të reduktohet në (1.88) sipas transformimit (1.89) atëherë dhe vetëm atëherë kur ekziston një matricë katrore reale $S(t)$ me përmasa kxk e tillë që*:

$$A(t+1)S(t) = S(t+1)A(t) + S(t+1)S(t)H(t)(\Delta B(t))H^{-1}(t), \tag{1.91}$$

$$A(t_0) = S(t_0)B(t_0) \tag{2.92}$$

Sistemi (1.84) transformohet sipas (1.89), duke përdorur matricat $S(t)$dhe $H(t)$ të përcaktuara si më sipër.

$$H(t+1)y(t+1) = A(t)H(t)y(t) \tag{1.93}$$

Me transformime të mëtejshme:

$$y(t+1) = \quad H^{-1}(t)S^{-1}(t)A(t)H(t)y(t) \tag{1.94}$$

pas zëvendësimeve përftohet

$$B(t) = \quad H^{-1}(t)S^{-1}(t)A(t)H(t), \tag{1.95}$$

ku $B(t)$ është zgjidhja e vetme e kushteve fillestare.

$$\Delta B(t) = F(t) \ , B(t_0) = S^{-1}(t_0)A(t_0) \tag{1.96}$$

ku

$$F(t) = \ \Delta (H^{-1}(t)S^{-1}(t)A(t)H(t)). \tag{1.97}$$

Ky problem është ekuivalent me zgjidhjen e (1.91).

Rrjedhim: *Sistemi linear homogjen i ekuacionit me diferenca (1.84) mund të reduktohet në:*

$$y(t+1) = By(t) \tag{1.98}$$

me matrice me koeficentë konstante sipas tranformimit (1.89) atëherë dhe vetëm atëherë kur ekziston një matricë e rregullt reale $S(t)$ e përcaktuar për $t \geq t_0$ e tillë që

$$A(t+1)S(t) = S(t+1)A(t) \tag{1.99}$$

$$A(t_0) = S(t_0)B \tag{1.100}$$

Rrjedhim: *Nëse ekziston një matricë S katrore kxk me koeficentë konstante e tillë që*

$$A(t+1)S = SA(t) \tag{1.101}$$

atëherë (1.84) reduktohet në (1.98) me $B = S^{-1}A(t_0)$.

Përcaktimi i matricës $S(t)$ gjendet te Tiryaki,A., Misir,A. (2008).
Kushtet e qëndrueshmërisë së sistemeve të ekuacioneve me diferenca vlejnë edhe për këtë rast.

Për sistemet shumë përmasore duke u bazuar në linearizimin rreth pikës së ekuilibrit (0,0) nxirren përfundime për sjelljen lokale të zgjidhjeve të tyre. Përcaktimet e qëndrueshmërisë ose jo të pikës fikse janë të ngjashme me ato që janë dhënë më parë, [Sedaghat,2003] dhe [Kocic, 1993] e bazohen në dy teoremat e mëposhtme për të studiuar sjelljen lokale të tyre. Teoremat e mëposhtme jo vetëm që japin kriterin, por edhe një mënyrë më të thjeshtë për të mos llogaritur rrënjët e polinomit karakteristik të sistemit të linearizuar.

Teorema 11. Sedaghat (2003) *Është dhënë një sistem i ekuacioneve të diferencave* $X_{t+1} = f(X_t, t), t = 0,1, \dots, dhe\ X^*$*është pikë ekuillibri e sistemit. Nëse të gjitha vlerat e veta të matricës së Jakobit të vlerësuara nga* X^* *ndodhen brenda hapësirës së hapur njësi* $|\lambda| < 1$, *atëherë* X^* *është asimptotikisht e qëndrueshme. Nëse një nga ato do të kishte modul më të madh se një, atëherë* X^* *është jo e qëndrueshme.*

Teorema 12. Kocic, V. L., Ladas ,G. (1993) *Është dhënë një sistem i ekuacioneve të diferencave* $X_{t+1} = f(X_t, t),\ t = 0,1, \dots,\ dhe\ X^*$ *është pikë ekuillibri e sistemit. Polinomi karakteristik i sistemit rreth pikës së ekuilibrit* X^* *është* $P(\lambda) = a_0\ \lambda^t + a_1\ \lambda^{t-1} + + \cdots + a_{t-1}\ \lambda + a_t\ = 0$ *me keoficentë reale dhe* $a_0\ > 0$. *Atëherë rrënjët e polinomit* $p(\lambda)$ *gjenden brenda zonës së hapur njësi* $|\lambda| < 1$ *atëherë dhe vetëm atëherë kur* $\Delta_k > 0$ *për* $k = 1,2, \dots, t$
ku Δ_k *janë minorët kryesorë të rendit të k të të matricës katrore të rendit n.*

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} \tag{1.102}$$

Polinomi karakteristik i sistemit ndërtohet pasi kryhet linearizimi e tij dhe kjo teoremë jep kritere të qarta për sjelljen lokale të zgjidhjeve të sistemit.
Megjithatë metoda e linearizimit nuk nxjerr përfundime për sjelljen globale të zgjidhjeve të sistemit kur vlerat e veta e kanë modulin një. Metoda të tjera të fuqishme përdoren në këtë rast, por ato janë jashtë objektit të këtij studimi.

1.4 Zgjidhja numerike e ekuacioneve diferenciale

Ekuacionet diferenciale janë në bazë të shumë modeleve matematikore në mjaft dukuri të jetës reale. Dy janë drejtimet e trajtimit për zgjidhjen e tyre: analiza diskrete në lidhje me kohën dhe analiza e zgjidhjes kur koha shihet si variabël i vazhdueshëm. Robbin (1971), Champsaur (1997), John B. Taylor (1980). Zgjidhja e problemeve ekonomike dhe kompjuterizimi i zgjidhjeve kërkojnë shpesh analogjinë e ekuacioneve diferenciale me ekuacionet me diferenca. Janë të shumta metodat përafruese me anën e derivative të pjesshme dhe përdorimit në to të diferencave. Problemi që shtrohet është: A kanë të njëjtën pikë ekuilibri ekuacioni diferencial dhe ai me diferenca?.

1.4.1 Përafrimi i zgjidhjes së ekuacioneve diferenciale me metodën e Eulerit

Analogjia diskrete e zgjidhjes së ekuacioneve diferenciale realizohet me anën e përdorimit të operatorit të diferencës për të ndërtuar algoritmin përkatës dhe për këtë ka metoda përafrimi të shumta. Për përafrimin e ekuacionit :

$$x'(t) = g\big(t, x(t)\big), \qquad x(t_0) = x_{0,} \quad t_0 \le t \le b \tag{1.103}$$

segmenti $[t_0, b]$ ndahet në N intervale me madhësi të hapit $h = (b - t_0)/N$ ku $t_{j=} t_0 + hj$.
Metoda përafron $x'(t) \approx \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$. Ekuacioni i mësipërm merr formën

$$x(t + h) = x(t) + hg\big(t, x(t)\big), \tag{1.104}$$

dhe për $t = t_0 + nh$, përftohet:

$$x(t_0 + (n + 1)h) = x(t_0 + nh) + hg\big(t_0 + nh, x(t_0 + nh)\big) \tag{1.105}$$

Për $n = 0,1,2, \dots N - 1$

Duke zëvendësuar $x(t_0 + nh)$ me $x(n)$ përftohet:

$$x(n + 1) = x(n) + hg\big(t, x(n)\big), \tag{1.106}$$

Në ekuacionin (1.106), i cili jep algoritmin e Eulerit, pika x^* është një pikë ekuilibri atëherë dhe vetëm atëherë kur $g(x^*) = 0$. Kështu ekuacioni diferencial dhe ai me diferenca kanë të njëjtën pikë ekuilibri. Elaydi,S. (2005).

Kjo na lejon të bëjmë përafrime të derivative me anën e diferencave dhe shpesh të përdorim edhe kritere të studimit të qëndrueshmërisë që vijnë nga metodat numerike të zgjidhjes së ekuacioneve diferenciale jo vetëm me derivate të rendit të parë, por edhe me derivate të rendit të dytë duke bërë përafrimet përkatëse.

1.4.2 Formula që lidhin derivatet e pjesshme me diferencat e fundme

Metodat numerike për zgjidhjen e ekuacioneve me derivate të pjesshme bazohen në përafrimin e derivateve me diferenca të fundme dhe këto janë në bazë të llogaritjeve. Eshtë mirë të merret parasysh se formulat që japin përafrimin e operatorit diferencial me diferencat e fundme, plotësojnë barazimin: hD=$log(1+\Delta)$, ku h është hapi, $\Delta = y_{n+1} - y_n$ diferenca e përparme dhe D është operatori diferencial. Eshtë gjithashtu e mundur të vendoset lidhje ndërmjet diferencave të përparme dhe atyre të prapme. Prej këndej ka disa mundësi për të zgjedhur përafrimet, por analiza e konvergjencës tregon se cila nga zgjedhjet është e përshtatshme. Ideja bazë e përafrimit të tre ose pesë pikave me anën e diferencave paraqitet më poshtë Quarteroni A., Valli A. (1994),. Strikwerda J.C. (1989), Thomas, J.W. (1995), Griffiths D.F.et.al. (1980).

Nëse funksioni U ka derivate të pjesshme të vazhdueshme në një zonë rrethuese të pikës P zbërthehet sipas formulës Taylor:

$$U(x+h) = U(x) + hU'(x) + \frac{1}{2}h^2U''(x) + \frac{1}{6}h^3U'''(x) + \dots \quad (1.107)$$

$$U(x-h) = U(x) - hU'(x) + \frac{1}{2}h^2U''(x) - \frac{1}{6}h^3U'''(x) + \dots \quad (1.108)$$

Duke mbledhur (1.107) me (1.108) merret:

$$U(x+h) + U(x-h) = 2U(x) + h^2U''(x) + O(h^4) \quad (1.109)$$

ku me $O(h^4)$ janë shënuar termat me fuqi katër ose me të lartë së katër të *h*. Duke pranuar që këto mund të neglizhohen duke u krahasuar me fuqitë e ulta të *h* mund të shkruhet:

$$U''(x) = \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x=x} \approx \frac{1}{h^2}\{U(x+h) - 2U(x) + U(x-h)\} \quad (1.110)$$

me një gabim të rendit h^2.

Duke zbritur nga ekuacioni (1.107) ekuacionin (1.108):

$$U'(x) = \left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=x} \approx \frac{1}{2h}\{U(x+h) - U(x-h)\} \tag{1.111}$$

me një gabim të rendit $O(h^2)$.

Ekuacioni (1.111) përafron pjerrësinë e tangentes në një pikë me pjerrësinë e kordës përkatëse dhe marrim përafrimin me diferenca qëndrore. Gjithashtu mund të përafrohet pjerrësa e tangentes në një pikë me pjerrësinë e kordës, duke përftuar formulën me diferenca të përparme

$$U'(x) \approx \frac{1}{h}\{U(x+h) - U(x)\} \tag{1.112}$$

\

ose me diferenca të prapme:

$$U'(x) \approx \frac{1}{h}\{U(x) - U(x-h)\} \tag{1.113}$$

Gabimet në përafrimin me diferencë të përparme ose të prapme janë *O(h).*

Nëse funksioni *U* është një funksion i ndryshoreve të pavarura *x* dhe *t*, ndahet plani në bashkësi drejtkëndëshash të barabartë me anë të dy familjeve të drejtezave paralele

$$x_i = ih,\ i = 0, \pm1, \pm2, \ldots \text{dhe } y_j = jk, j = 0,1,2 \ldots$$

Shënohet vlera e funksionit U në pikën përfaqësuese *P(ih,jk)* të rrjetës së ndërtuar me

$$U_p = U(ih, jk) = U_{i,j} \tag{1.114}$$

Atëherë

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_p = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{\{(i+1)h,jk\}} - 2U_{\{ih,jk\}} + U_{\{(i-1)h,jk\}}}{h^2} \tag{1.115}$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) \approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} \tag{1.116}$$

me një gabim të rendit h^2. Në mënyrë të ngjashme nxirret që

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)_{i,j} \approx \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2} \tag{1.117}$$

me një gabim të rendit k^2.

Nga përfundimet e mësipërme, formula për përafrimin me diferencë të përparme për $\frac{\partial U}{\partial t}$ në pikën *P* është:

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{U_{i,j+1}-U_{i,j}}{k} \tag{1.118}$$

me një gabim të renditO(k).

1.4.3 Pajtueshmëria, qëndrueshmëria dhe konvergjenca

Qëndrueshmeria sipas Lax-Richtmyer, Teorema Lax Reddy S.C., Trefethen L.N. (1990):

Le të jetë *L(U)=0* ekuacioni diferencial me derivate të pjesshme i ndryshoreve të pavarura *x* dhe t dhe *U* zgjidhja e saktë e tij.
F(u)=0 është ekuacioni i përafruar i skemës me diferenca të fundme dhe *u* zgjidhja e saktë e tij. Përcaktohet dhe funksioni *v(x,t)* i vazhdueshëm e me derivate të pjesshme të vazhdueshme. Gabimi i trungëzimit $T_{i,j}(v)$ në pikën *(ih,jk)* përcaktohet nga barazimi:

$$T_{i,j}(v) = F_{i,j}((v) - L(v,i) \tag{1.119}$$

Kur gabimi lokal i trungëzimit $T_{i,j}(v) \to 0$ kur $h \to 0, h \to 0$, skema me diferenca quhet e pajtueshme me ekuacionin përkatës.
Vektori i vlerave të zgjidhjes $U_{j+1} = \left[u_{1,j+1,} u_{2,j+1}, \dots u_{N-1,j+1}\right]^T$ i ekuacioneve me diferenca të fundme në nivelin e *(j+1)*-të lidhet me vektorin e vlerave të zgjidhjes në nivelin e *j*-të me anë të ekuacionit

$$u_{j+1} = Au_j + b_j \tag{1.120}$$

ku *bj* është vektor-shtylla e vlerave kufitare të njohura dhe *A* një matricë *(N-1)x(N-1)* me elemente të njohura.
Skema me diferenca të fundme quhet e qëndrueshme kur norma e matricës *A*, e pajtueshme me normë n e *U*-së kënaq mosbarazimin $\|A\| \leq 1$, nëse zgjidhja e ekuacionit diferencial me derivate të pjesshme nuk rritet me rritjen e *t*-së, ose $\|A\| \leq 1 + 0(k)$, nëse zgjidhja e ekuacionit diferencial me derivate të pjesshme rritet me rritjen e *t*-së.
Metoda matricore e analizës jep një përkufizim tjetër të qëndrueshmërisë. Ekuacionet janë të qëndrueshme në qoftë se moduli i vlerave vetjake të matrices *A*, pra në qoftë se rrezja spektrale e *A*-së kënaq mosbarazimin $\varrho(A) \leq 1$, nëse zgjidhja e ekuacionit diferencial me derivate të pjesshme nuk rritet me rritjen e *t*-së, ose $\varrho(A) \leq 1 + 0(k)$, nëse zgjidhja e ekuacionit diferencial rritet kur $t \longrightarrow \infty$.
Le të jetë *U* zgjidhja e saktë e ekuacionit diferencial me derivate të pjesshme dhe u zgjidhja e saktë e skemës me diferenca të fundme. Skema me diferenca të fundme thuhet se është konvergjente kur $u \to U$.

Studimi i konvergjencës së metodave me diferenca të fundme për zgjidhjen e ekuacioneve lineare mund të bëhet në mënyrë të drejtpërdrejtë duke u nisur nga përkufizimi, por mund të bëhet duke u mbështëtur në qëndrueshmërinë.
Vështirësitë e karakterit teknik që paraqet studimi i konvergjencës duke u mbështetur në përkufizim çojnë drejt alternativës së dytë, studimit të saj me anë të qëndrueshmërisë që është një rrugë më e preferuar. Për këtë, jepet përcaktimi i qëndrueshmërisë sipas Lax-Richtmyer në qoftë se zgjidhja $U(x,t)$ që i korespondon një funksioni fillestar $f(x)$ kënaq mosbarazimin:

$$\|U(x,t)\| \leq M(t)\|f(x)\| \qquad \text{për} \quad 0 \leq t \leq T \tag{1.121}$$

ku $M(t)$ është e pavarur nga h.

Teorema Lax: Reddy S.C., Trefethen L.N. (1990). *Në qoftë se paraqitet problemi i vlerave fillestare lineare dhe një përafrim i tij me diferenca të fundme që kënaq kushtin e pajtueshmërisë, atëherë qëndrueshmëria është kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm për konvergjencën*.

Fusha e zgjidhjeve të ekuacionit diferencial me diferenca të pjesshme merret në drejtkëndëshin e përcaktuar nga $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$ dhe ndahet në formë rrjetë me anë drejtkëndëshash që përcaktohen nga vijat $x_i = ih$ dhe $i = 0, \overline{N}$ dhe vija $t_j = j \cdot k$, $j = 0, \vec{j}$. h dhe k lidhen me relacionet $k = r \cdot h$ ose $= r \cdot h^2$, r> 0. Pra, $h \longrightarrow 0$ kur $k \longrightarrow 0$. Ekuacioni me diferenca të fundme që lidh vlerat e pikave të rrjetës midis rrjeshtit të $(j+1)$-të dhe të j-të, është:

$$b_{i-1}U_{i-1,j+1} + b_iU_{i,j+1} + b_{i+1}U_{i+1,j+1} = c_{i-1}u_{i-1,j} + c_iU_{i,j} + c_{i+j}U_{i+1,j} \tag{1.122}$$

ku koeficientet janë konstante.
Në qoftë se vlerat kufitare në $i=0$ dhe $i=N$, $j>0$ janë të njohura, atëherë këto $(N-1)$ ekuacione për $i = \overline{1, N-1}$ mund të paraqiten në trajtën matricore si më poshtë:

$$\begin{bmatrix} b_1b_2 & \cdots & 0 \\ b_1b_2b_3 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & b_{N-3}b_{N-2}b_{N-1} \\ & & \ddots\, b_{N-2}b_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2,j+1} \\ u_{N-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1c_2 & \cdots & 0 \\ c_1c_2c_3 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & c_{N-3}c_{N-2}c_{N-1} \\ & & \ddots\, c_{N-2}c_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2,j} \\ u_{N-1,j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_0u_{0,j} - b_0u_{0,j+1} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ c_{N-1}u_{N-1,j-1} - b_{N-1}u_{N-1,j+1} \end{bmatrix}$$

ose $Bu_{j+1} = Cu_j + d_j$ ku, matricat B dhe C të rendit $(N-1)$ janë ato të paraqitura më sipër. U_{j+1} paraqet vektorin shtyllë të vlerave kufitare të njohura kështu që,

$$U_{j+1} = B^{-1}cu_j + b^{-1}d_j \tag{1.123}$$

mund të shprehet në mënyrë më të përshtatshme:

$$u_{j+1} = Au_j + f_j \,, \tag{1.124}$$

ku $A=B^{-1}C$ dhe$f_j = B^{-1}d_j$. E zbatuar në mënyrë rekursive, kjo çon në:

$$u_j = Au_{j-1} + f_{j-1} = A\left(Au_{j-2} + f_{j-2}\right) + f_{j-1} \tag{1.125}$$

$$= A^2u_{j-2} + Af_{j-2} + f_{j-1} = \cdots$$

$= A^j u_0 + A^{j-1}f_0 + A^{j-2}f_1 + \cdots + f_{j-1}$ ku u_0 është vektori i vlerave fillestare dhe

$$f_0, f_1, \ldots, f_{j-1}$$

janë vektorët e vlerave kufitare të njohura. Kur jemi të interesuar për studimin e një vetie të ekuacioneve, në rastin tonë të qëndrueshmerisë më tepër se për një zgjidhje numerike të tij, vektorët konstante mund të eleminohen me anë të turbullimeve. Griffiths D.F.et.al. (1980).
Vektori i vlerave fillestare u_0 turbullohet në u_0^*. Zgjidhja e saktë në rreshtin e *j*-të do të jetë:

$$u_j^* = A^j u_0^* + A^{j-1}f_0 + A^{j-2}f_1 + \cdots + f_{j-1} \tag{1.126}$$

në qoftë se turbullimi ose vektori i gabimit e është i përcaktuar nga barazimi:

$$e = u^* - u \tag{1.127}$$

$$e_j = u_j^* - u_j = A^j(u_0^* - u_0) = A^j e_0, \qquad \text{j=1,…,J} \tag{1.128}$$

Kjo do të thotë se, një turbullim e_0 i vlerave fillestare shtrohet sipas ekuacionit:

$$e_j = Ae_{j-1} = A^2e_{j-2} = \cdots = A^j e_0, \qquad \text{j=1,…,J} \tag{1.129}$$

Kështu për matricën e pajtueshme dhe vektorin normal,

$$\|e_j\| \le \|A^j\|\|e_0\| \tag{1.130}$$

përcaktohet skema e diferencave të qëndrueshme, kur ekziston një numër M pozitiv i pavarur nga *j, h, k* të tillë që:

$$\|A^j\| \le M \qquad \text{j=1,…,J} \tag{1.131}$$

Meqë kjo normë është e kufizuar, sjell dhe një kufizim në rritjen e gabimit

$$\|e_j\| \leq M\|e_0\| \tag{1.132}$$

Përcaktimi i qëndrueshmërisë jepet nga:

$$\|A^j\| = \|AA^{j-1}\| \leq \|A\|\|A^{j-1}\| \leq \cdots \leq \|A\|^j \quad , \qquad \|A\| \leq 1 \tag{1.133}$$

Ky është kushti i nevojshëm dhe i mjaftueshëm për qëndrueshmërinë e ekuacioneve me diferenca kur zgjidhja e ekuacioneve diferenciale me derivate të pjesshme nuk rritet me rritjen e *t*-së.

KAPITULLI 2 Modeli Cobweb

2.1 Model i rritjes Solow

Edhe pse një model jolinear, modeli i rritjes Solow mund të studjohet duke përgjithësuar ekuacionin e diferencave rreth gjendjes së qëndrueshme Durlauf (2001). Modeli u prezantua për herë të parë nga Solow në vitin 1956, Solow R.M. (1936). Në këtë studim paraqitet një model i thjeshtë ekonomik pa marrë parasysh efektin e zhvillimit teknologjik Neuser (2008). Prodhimi në kohën *t*, i paraqitur me Y_t, varet nga dy faktorë të rëndësishëm të prodhimit: *kapitali*, K_t, dhe *fuqia punëtore*, L_t. Si rrjedhojë produkti në kohën *t* do të jepet me funksionin e prodhimit $Y_t = F(K_t, L_t)$, i cili duhet të këtë veçoritë e mëposhtme:

- F mund të diferencohet dy herë në mënyrë të njëpasnjëshme.
- Prodhimi marxhinal të jetë gjithmonë pozitiv: $\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0$ dhe $\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0$.
- Prodhimi marxhinal sa vjen dhe zvogëlohet: $\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial^2 K} < 0$ dhe $\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial^2 L} < 0$.
- F plotëson kushtin: $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$ për të gjitha $\lambda > 0$.
- F përmbush kushtet:

$$\lim_{K\to\infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = 0, \qquad \lim_{L\to\infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = 0$$
$$\lim_{K\to 0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = 0, \qquad \lim_{L\to 0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = 0$$

Shembulli klasik për funksionin e prodhimit me këto veçori është rasti i funksionit të Cobb-Douglas: $F(K,L) = AK^{1-\propto}L^{\propto},\ A > 0,\ 0 <\propto< 1$. Kushti i fundit zakonisht nuk listohet ndër veçoritë e funksionit neoklasik të prodhimit. Sidoqoftë, është i domosdoshëm për të siguruar një gjendje të qëndrueshme.
Prodhimi mund të përdoret ose për konsumim, C_t, ose për investime, I_t:

$$Y_t = C_t + I_t \tag{2.1}$$

Ekonomia kursen një pjesë të prodhimit. Ngaqë në një ekonomi të mbyllur investimet janë të barabarta me kursimet dhe duke patur parasysh se konstantja $s \in (0,1)$, merret:

$$I_t = sY_t \tag{2.2}$$

Investimet shtohen në stokun kapital ekzistent, i cili amortizohet çdo periudhë me një rend konstant $\delta \in (0,1)$:

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t = (1-\delta)K_t + sY_t = (1-\delta)K_t + sF(K_t, L_t) \quad (2.3)$$

Ndërsa kapitali është një faktor i parikrijueshëm i prodhimit, fuqia punëtore është një faktor fiks i prodhimit, i cili rritet me një konstante $\lambda > 0$ të dhënë në mënyrë ekzogjene. Në këtë mënyrë L_t evolon në $L_{t+1} = (1+\mu)L_t$. Duke bërë raportin e barazimit (2.3) me L_{t+1} dhe duke përdorur supozimin se plotësohet kushti i katërt arrihet në rezultatin:

$$k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{(1-\delta)}{(1+\mu)}k_t + \frac{s}{1+\mu}f(k_t) = g(k_t) \quad (2.4)$$

ku $k_t = \frac{K_t}{L_t}$ përcakton intensitetin e kapitalit dhe

$$f(k_t) = F(\frac{K_t}{L_t}, 1) \quad (2.5)$$

Ekonomia fillon në periudhën zero me një kapital fillestar $k_0 > 0$. Ekuacioni i diferencave jolinear i rendit të parë (2.4) së bashku me kushtin fillestar përcakton në mënyrë të vetme evolucionin e intensitetit kapital me kalimin e kohës, dhe me pas të gjitha vlerat e tjera në model. Konkaviteti i *F* vjen nga *f* dhe si pasojë nga *g* në mënyrë të tillë që $g' > 0$ dhe $g'' < 0$. Për më tepër, $\lim_{k\to 0} g(k) = 0$ dhe $\lim_{k\to\infty} g(k) = \infty$.

Ekuacioni jolinear i diferencave ka dy gjendje të qëndrueshme. E para është e dhënë në zero sepse $g(0) = 0$. Kjo pikë nuk ka rëndësi ekonomike. Ekzistenca e pikës së dytë pozitive të qëndrueshme mund të përftohet nga veçoritë e mëposhtme të g(.):

$$g(0) = 0, \lim_{k\to 0} g'(k) = \infty, \lim_{k\to 0} g'(k) = \frac{(1-\delta)}{(1+\mu)} < 1, dhe\ \ g'(k) > 0 \quad (2.6)$$

Këto veçori sigurojnë që funksioni *g* të jetë mjaftueshëm i pjerrët në origjinë dhe më pas aq i sheshtë sa të pritet më në fund me vijën me pjerrësi 45 gradë. Duhet vënë në dukje se derivati $g'_{(k^*)}$ duhet të jetë më i vogël se një me qëllim që *g*-ja të pritet me vijën 45 gradëshe.

Qëndrueshmëria asimptotike e k^* vendoset thjesht duke vëzhguar se (k_t) rritet në mënyrë monotonë për $k_0 \in (0, k^*)$ dhe zvogëlohet në mënyrë monotone për $k_0 > k^*$. Kështu që (k_t) konvergjon në mënyrë monotone në k^* në mënyrë të pavarur nga vlera fillestare $k_0 > 0$.

Sjellja lokale e (k_t) rreth gjendjes së qëndrueshme mund të analizohet duke linearizuar funksionin *g* rreth gjendjes së tij të qëndrueshme nga përafrimi i rendit të parë të Teilorit.

$$k_{t+1} \approx k^* + \frac{\partial g(k)}{\partial K}\Big|_{k=k^*}(k_t - k^*) \quad (2.7)$$

Studiohet sjellja lokale e ekuacionit jolinear me diferenca (2.4) rreth gjendjes së qëndrueshmeme anë të ekuacionit homogjen të diferencave:

$$k_{t+1} - k^* = \Phi(k_t - k^*) \tag{2.8}$$

ku $0 < \Phi = \frac{\partial g(k)}{\partial K}\Big|_{k=k^*} < 1$. Duke filluar në periudhën zero me një intensitet kapitali $k_0 > 0$, zgjidhja e këtij problemi të vlerave fillestare është: $k_t = k^* + \Phi^t(k_0 - k^*)$. Për sa kohë që $0 < \Phi < 1$, gjendja e qëndrueshme k^*është e qëndrueshme në mënyrë asimptotike.
Problemi që shtrohet është ruajtja e qëndrueshmërisë së pikës së ekuilibrit të ekuacionit jolinear të diferencave të dhënë në fillim dhe versionit të tij të linearizuar. Teorema e mëposhtme, tregon se kjo është e vërtetë për rastin e mësipërm, por ajo vlen edhe në rastin e përgjithshëm:

Teorema 3. *Le të jetë X^* një pikë ekuilibri për ekuacionin e diferencave invariant jolinear*

$$X_{t+1} = f(X_t) \tag{2.9}$$

ku f mund të diferencohet në mënyrë të vazhdueshme në pikën X^*. Atëherë,

(a) në qoftë se $|f'(X^*)| < 1$, rrjedh se X^*është pikë ekuilibri e qëndrueshme në mënyrë asimptotike.

(b) në qoftë se $|f'(X^*)| > 1$, atëherë X^* nuk është e qëndrueshme.

Vërtetim. Vërtetimi mbështetet te Elaydi (2005). Duke supozuar se $|\mathrm{f}'(\mathrm{X}^*)| \leq \mathrm{M} < 1$ për shkak të vazhdueshmërisë së derivatit, ka një interval $J = (X^* - \gamma, X^* + \delta), \gamma > 0$, i tillë që $|\mathrm{f}'(\mathrm{X})| \leq \mathrm{M} < 1$ për të gjitha $X \in J$. Për $X_0 \in J$,

$$|X_1 - X^*| = |f(X_0) - f(X^*)| \tag{2.10}$$

Ekziston një ε, $X_0 < \varepsilon < X^*$, i tillë që

$$|f(X_0) - f(X^*)| = |f'(\varepsilon)||X_0 - X^*| \tag{2.11}$$

Prej këndej,

$$|X_1 - X^*| \leq M|X_0 - X^*| \tag{2.12}$$

Me induksion vërtetohet se,

$$|X_t - X^*| \leq M^t|X_0 - X^*| \tag{2.13}$$

Për çdo $\varepsilon > 0$, le të jetë $\delta_\varepsilon = min\{\gamma, \varepsilon\}$. Atëherë nga $|X_0 - X^*| < \delta_\varepsilon$ rrjedh se $|X_t - X^*| < \varepsilon$ për të gjitha $t \geq 0$ mund të arrihet në përfundimin që X^* është një pikë ekuilibri e qëndrueshme. Gjithashtu X^* është atraktiv sepse $\lim_{t\to\infty}|X_t - X^*| = 0$. Si përfundim X^* është i qëndrueshëm në mënyrë asimptotike.

2.2 Një model i mbështetjes së çmimeve

Problemi shqyrtohet në një ekonomi ku investitorët kanë dy pasuri të paluajtshme në dispozicion. Woodford, M. (2003), Neuser (2008). E para është një depozitë bankare pa rrezik, e cila paguan një normë interesi konstante $r > 0$ në çdo periudhë. E dyta është një aksion i zakonshëm, i cili i jep pronarit një dividend të caktuar për aksion. Problemi konsiston në gjetjen e çmimit të aksionit p_t në funksion të dividenteve që jepen (d_{t+h}) , $h = 0.1$ ... dhe normës r të interesit. Në këtë model nuk merret parasysh pasiguria, kështu që kthimi nga të dy investimet duhet të jetë i barabartë. Duke qënë se fitimi i investimit në aksion konsiston në pagesat për dividend d_t dhe në ndryshimin e pritshëm të çmimit $p^e_{t+1} - p_t$, ky kusht arbitrar çon në:

$$r = \frac{d_t + p^e_{t+1} - p_t}{p_t} \Leftrightarrow \qquad p^e_{t+1} = (1 + r)p_t - d_t \tag{2.14}$$

ku p^e_{t+1} përcakton çmimin e pritshëm për periudhën pasardhëse. Duke marrë parasysh se pritshmëritë e investitorëve janë racionale, ekuacioni i mësipërm transformohet në ekuacionin e thjeshtë diferencial të rendit të parë:

$$p_{t+1} = (1 + r)p_t - d_t \tag{2.15}$$

me $\phi = 1 + r$ dhe Z_t=$-d_t - 1$. Meqënëse $\phi = 1 + r > 1$, mund të shmanget zgjidhja që zhvendos indeksin kohor mbrapa në kohë pasi shuma infinit nuk do të konvergjojë për një pagesë konstante dividendesh. Duke u kthyer te zgjidhja e ardhshme,vihet re se $X_t^{(f)}$është e mirë përcaktuar edhe për një pagese konstante dividentesh. Në këtë rast zgjidhja e veçantë $X_t^{(f)}$ nuk është asgjë përveç vlerës së tanishme të ulur të pagesave të dividenteve. Si rrjedhim jepet zgjidhja e mëposhtme e përgjithshme për ekuacionin diferencial (2.15):

$$p_t = (1 + r)^t c_f + X_t^{(f)} = (p_0 - X_0^{(f)})\,(1 + r)^t + \tag{2.16}$$

ku $X_t^{(f)} = (1 + r)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty}(1 + r)^{-j} d_{t+j}$. Termi $(1 + r)^t c_f$ zakonisht quhet "termi flluskë" pasi sjellja e tij nuk është e lidhur me pagesën e dividenteve, ndërsa termi $X_t^{(f)}$ quhet themelor pasi pasqyron vlerën e vërtetë të aksionit.

Supozimi që $c_f = p_0 - X_0^{(f)} > 0$, është zero, nënkupton se çmimi i tanishëm i stokut është më i lartë nga sa mund të justifikohet me pagesat e ardhshme të dividenteve. Duke ju referuar

ekuacionit (2.14), ky çmim i lartë (i krahasuar me pagesat e dividenteve) mund të justifikohet vetëm nga një fitim i caktuar kapitali, pra një pritshmëri se çmimi i aksionit do të rritet në periudhën e ardhshme. Kjo e bën çmimin në periudhën e ardhshme akoma më të ndryshme se themelori, i cili duhet të justifikohet nga një fitim kapitali akoma dhe më i madh në përiudhën tjetër, e kështu me radhë. Në fund termi flluskë merr rëndësi parësore dhe çmimi i aksionit bëhet pothuajse i pavarur nga pagesat e dividenteve. Por kjo situatë nuk është e përshtatshme për llogaritje afatgjata. Prandaj i vetmi çmim i arsyeshëm p_0 është $X_0^{(f)}$. Kjo e eleminon termin flluskë në mënyrë të efektshme duke dhënë zgjidhjen:

$$p_t = X_t^{(f)} = (1+r)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} (1+r)^{-j} d_{t+j} \tag{2.17}$$

Prandaj çmimi i aksionit është gjithmonë i barabartë me çmimin e ulur të pagesave të ardhshme të dividenteve. Një zgjidhje e tillë është e arsyeshme në një situate ku nuk ka pasiguri dhe ka informacion të plotë. Kjo zgjidhje tregon se çmimi i përgjigjet menjëherë çdo ndryshimi në pagesat e pritshme të dividenteve. Efekti i ndryshimit të $d_{t+h}, h = 0, 1, 2, \ldots$ në p_t jepet nga

$$\frac{\partial p_t}{\partial d_{t+h}} = (1+r)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} (1+r)^{-j} d_{t+j} \qquad h = 0,1 \ldots \tag{2.18}$$

Kështu që efekti pakësohet aq sa në të ardhmen të ndodhin ndryshime. Nëse konsiderojmë një ndryshim të përhershëm në dividend, psh. një ndryshim të të gjithë dividenteve me Δd, ndryshimi korespondues në çmim Δp_t është i barabartë me:

$$\Delta p_t = (1+r)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} (1+r)^{-j} \Delta d = \frac{\Delta d}{r} \tag{2.19}$$

Në mënyrë të ngjashme një rritje proporcionale e gjithë dividenteve do të çonte në të njëjtën rritje proporcionale në çmimin e aksionit. Konkluzioni që nxirret është se nën hipotezën e pritshmërive racionale, zgjidhja e problemeve ka kuptim nëse e eleminojmë termin flluskë.

2.3 Modeli Cobweb

Modeli Cobweb, i paraqitur për herë të parë nga Ezekiel (1938) për të analizuar sjelljen ciklike të tregjeve të agrikulturës është një prej modeleve të parë dinamikë në ekonomi. Modeli u ndërtua në bazë të kërkimeve shumë cilësore ekonometrike që kishin ndodhur në vitet ‘20. Që në vitin 1917 Moore demonstroi se çmimi i tanishëm i pambukut varej nga sasia e prodhuar atë vit, ndërsa sasia e prodhuar e këtij viti lidhet ngushtë me atë të vitit të kaluar. Studime të tjera të Moore treguan se të njëjtat luhatje mund të vihen re edhe në produktetë tjera të komoditetit. Studimit përmbledhës të përpiluar nga Ezekiel i parapritën tre studime që u botuan në të njëjtin vit, në 1930. Ricci, një studiues italian dhe Tinbergen, një studiues holandez i botuan punimet e tyre në të njëjtin numër të së njëjtës reviste. Ndërsa studiuesi amerikan Schultz në të njëjtin vit në

një reviste tjetër. Të treja punimet e trajtuan faktikisht jo shumë teoremën Cobweb, por diskutuan karakteristikat e saj kryesore. Edhe pse pas botimit të Ezekiel-it në 1938 modeli nuk u trajtua shumë në vitet që vijuan, vetëm në vitet 1950 ai mori rëndësi të veçantë. Zhvillimet e fundit të pritshmërive racionale Lukas (1971,1986) duket se e kanë vënë modelin cobweb në qendër të zbatimeve matematikore dhe ekonomike për shkak të thjeshtësisë që paraqet si në zbatim edhe në kuptimin dhe nxjerrjen e përfundimeve.

Vendimet e marra në një periudhë duke u bazuar në variablat e një përiudhe tjetër, bëhen të mundura vetëm me përdorimin e një modeli dinamik. Në këtë studim ky model i cili konsiderohet si një sistem dinamik i ekuacioneve me diferenca, merr një rëndësi të veçantë pasi kombinon metodat matematikore të gjetjes së pikës së ekuilibrit me modelet ekonomike të pritshmërisë së agjentëve ekonomike. Zhvillimi i aparatit matematikor është një pjesë e parashikimit të çmimit për produktet të ndryshme si dhe të atyre agrikulturorë, ku një vend të rëndësishëm do të zërë edhe sjellja e agjentëve ekonomikë dhe pritshmëritë që do të kenë ata. Ky seksion do të ndahet në pjesët e mëposhtme:

1. **Ndërtimi i modelit**. Fillimisht ndërtohet modeli matematikor duke u përqëndruar te zgjidhja e sistemit dinamik me ekuacione diferenciale.
2. **Zgjidhja e modelit** me anë të algoritmeve të ndryshme.
3. **Prezantimi i pritshmërive** heterogjenë dhe ndërtimi i eksperimenteve përkatëse.
4. **Diskutimi i përfundimeve** të nxjerra nga eksperimenti për gjetjen e pikës së ekuilibrit.

2.3.1 Ndërtimi i modelit të thjeshtë Cobweb

Modeli Cobweb i kërkesës dhe ofertës, është ndër modelet më të thjeshta dinamike në fushën e ekonomisë. Fillimisht analizohet një version i thjeshtë linear i tij. Në formën më të thjeshtë, modeli analizon luhatjet afatshkurtra në një treg të vetëm ku, në çdo periudhë niveli i çmimit përcaktohet duke barazuar kërkesën D_t dhe ofertën S_t: $D_t = S_t$.
Kërkesa në kohën t është e lidhur me çmimin në po atë periudhë kohore. Duke përcaktuar p_t çmimin në kohën t kërkesa do të jetë:

$$D_t = a - bp_t, \quad b > 0 \tag{2.20}$$

Ndërkohë, prodhuesi duhet ta marrë vendimin se çfarë sasie do të prodhojë shumë më herët (në periudhën paraardhëse *t-1* në rastin klasik të prodhimit bujqësor), dhe do e bazojë vendimin që do të marrë për prodhimin e sasisë, S_t, në pritshmërinë që do të ketë për çmimin në periudhën t, p_t^e. Ekuacioni i ofertës do të marrë formën:

$$S_t = c + dp_t^e + \lambda_t, \ d > 0 \tag{2.21}$$

ku λ_t përcakton shokun e ofertës. Në tregjet e agrikulturës λ_t përcakton, për shembull kushtet atmosferike.
Modeli është:

$$\begin{aligned} D_t &= a - bp_t, \qquad b > 0 \qquad (kerkesa) \\ S_t &= c + dp_t^e + \lambda_t, \qquad d > 0 \qquad (oferta) \\ D_t &= S_t \qquad (spastrimi\ i\ tregut) \end{aligned} \tag{2.22}$$

Në këtë gjendje ai nuk mund të zgjidhet për shkak të variablit të pavëzhgueshmërisë p_t^e.

Prandaj bëhet një hamendësim i mëtejshëm për mënyrën se si agjentët ekonomikë formojnë pritshmëritë e tyre për çmimet e periudhës së ardhshme për të vendosur sasinë që do të prodhojnë. Për thjeshtesi të studimit të modelit shqyrtohet rasti që agjentët ekonomikë formojnë pritshmeri naive. Duke supozuar se çmimi i produktit në periudhën *t* do të jetë sa çmimi në periudhën paraardhëse *t-1*: $p_t^e = p_{t-1}$. Pas zëvendësimit, modeli transformohet në modelin e mëposhtëm:

$$\begin{aligned} D_t &= a - bp_t, \quad b > 0 \qquad \textit{(kërkesa)} \\ S_t &= c + dp_{t-1} + \lambda_t, \quad d > 0 \qquad \textit{(oferta)} \\ D_t &= S_t \qquad \textit{(spastrimi i tregut)} \end{aligned} \tag{2.23}$$

Duke zëvendësuar ekuacionin e kërkesës dhe ofertës në kushtin e eikuilibrit përftohet:

$$a - bp_t = dp_{t-1} + c + \lambda_t \tag{2.24}$$

Modeli mund të zgjidhet duke u transformuar në një ekuacion me diferencatë rendit të parë:

$$p_t = \frac{a-(c+\lambda_t)}{b} - \left(\frac{d}{b}\right) p_{t-1} \tag{2.25}$$

Kushti që sistemi të jetë në ekuilibër është që çmimi të mbetet konstant në çdo periudhë, pra $p_t = p_{t-1} = p_{t-2} = \cdots = P^*$. Duke kryer veprimet merret:

$$p^* = \frac{a-(c+\lambda_t)}{b} - \left(\frac{d}{b}\right) p^* \tag{2.26}$$

$$P^* = \frac{a-(c+\lambda_t)}{b+d} \qquad ku \quad P^* \geq 0 \quad if \quad a \geq c + \lambda_t \tag{2.27}$$

Kjo pikë fikse është e vetme sepse kurbat e ofertës dhe kërkesës janë lineare. Sidoqoftë, ajo ka kuptim vetëm nën kushtin $a \geq c + \lambda_t$, ku çmimi i ekuilibrit P^*është pozitiv.

Për të zgjidhur këtë model mund të reduktohet ekuacioni johomogjen me diferenca në një ekuacion homogjen me diferenca duke marrë shmangie nga ekulibri. Duke i zbritur anë për anë ekuacionet (2.25) dhe (2.26) përftohet:

$$p_t - p^* = -\left(\frac{d}{b}\right)(p_{t-1} - p^*) \tag{2.28}$$

me zgjidhje:

$$p_t - p^* = (-\frac{d}{b})^t (p_0 - p^*) \tag{2.29}$$

e cila kënaq kushtin fillestar $p_t = p_0$ kur $t = 0$. Duke zëvendësuar p^* nga ekuacioni (2.27) përftohet në mënyrë më të zhvilluar:

$$p_t = \frac{a-(c+\lambda_t)}{b+d} + \left(-\frac{d}{b}\right)^t (p_0 - \left(\frac{a-(c+\lambda_t)}{b+d}\right) \tag{2.30}$$

Nëse kurba e kërkesës dhe ofertës kanë koeficientë këndorë normal $(b > 0)$ dhe $(d > 0)$, atëherë $\frac{b}{d} > 0$ dhe si rrjedhim$\left(-\frac{d}{b}\right) < 0$ që do të thotë se $\left(-\frac{d}{b}\right)^t$ do të alternojë shenjën dhe do të jetë positive për numra çift të t dhe negative për numra tek të t. Për më tepër, nëse $0 < \left|-\frac{d}{b}\right| < 1$ atëherë seritë do të tentojnë të shkojnë drejt ekuilibrit. Në rastin kur $\left|-\frac{d}{b}\right| > 1$ sistemi do të divergjojë nga çmimi i ekuilibrit. Së fundmi nëse $\left|-\frac{d}{b}\right| = 1$ sistemi as do të konvergjojë as do të divergjojë, por do të kryejë një cikël dy-periodik.

Ilustrohet përfundimi i mësipërm duke vendosur disa vlera të konstanteve për të dhënë sjelljen e grafikut. [Shone, 2002] ndërtoi një shembull të ngjashëm, por në modelin e tij nuk merrej parasysh shoku i ofertës (λ_t). Në fillim caktojmë koeficentët:

a=25, b=5, c=3, d=4,λ_t=0.5 (2.31)

Shihet se këta koeficientë përmbushin kushtin e konvergjencës $0 < \left|-\frac{d}{b}\right| < 1$. Grafiku konvergjon si më poshtë.

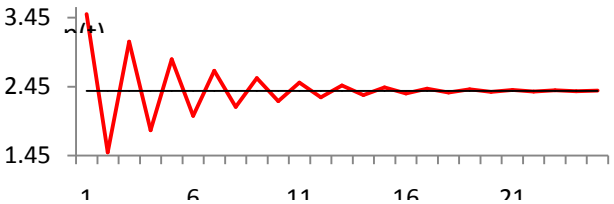


Figura 2.1:Konvergjenca e çmimit në modelin Cobweb

Burimi: Përpunime të autorit

Konvergjenca dhe divergjenca e çmimit në modelit Cobweb

Tre rastet duke ndjekur vargjet e pikave në diagramet e ofertës dhe kërkesës u indentifikuan në modelin klasik që në vitin 1938 nga Ezekiel . Siç u tregua matematikisht më lart ka tre raste të luhatjes së çmimit me kalimin e kohës në modelin linear Cobweb; ai mund të divergjoje, të konvergjojë ose të oshilojë në mënyrë të vazhdueshme.

Rasti i parë*: L*uhatje e vazhdueshme. Çdo pikëprerje me kurbën e ofertës ose kërkesës përfaqëson një periudhë të prodhimit. Rasti i parë i luhatjes së vazhdueshme, ndodh kur gradienti i kërkesës dhe ofertës janë të barabartë. Në periudhën e parë, prodhimi Q_1 i madh çon në një çmimP_1 të ulët për spastrimin e tregut. Ky çmim adaptohet në pritshmërinë e prodhuesve për vitin e ardhshëm $P_2^e = P_1$ dhe pasqyrohet në prodhimin e pakët në periudhën e dytë. Ky proces vazhdon periudhë pas periudhe deri sa procesi mbyllet në një cikël në periudhën e katërt dhe rikthehemi në prodhimin fillestar Q_1.

Rasti i dytë: Luhatje divergjente. Në këtë rast elasticiteti i kurbës së ofertës është më i madh se elasticiteti i kurbës së kërkesës. Periudhë pas periudhe luhatja e çmimit dhe e sasisë së prodhuar rritet vazhdimisht.

Rasti i tretë:, Luhatje konvergjente. Elasticiteti i kurbës së kërkesës është më i madh se ai i kurbës së ofertës. Luhatja e çmimit dhe sasisë së prodhuar sa vjen dhe zvogëlohet, deri sa modeli divergjon në çmimin e ekuilibrit të tregut.

Koncepti i modelit cobweb përshkruhet si relacion midis dy kurbave: çmimit dhe produktit të mëparshëm. Ezekiel në punimin Ezekiel (1938) vuri në dukje se kurba e çmimit tregon se prodhimi aktual është i ndikuar nga çmimet aktuale e jo ne atë që konsumatori blen duke u nisur nga nivele të ndryshme të çmimeve. Përparësia e modelit cobweb është se në studimin dhe parashikimin e çmimit u zhvillua koncepti i një teorie dinamike ekonomike. Sipas Ezekiel "*teoria cobweb zbulon një seri të reaksioneve, atëherë të dy kurbat ekzistojnë në dimensione të ndryshme kohore*". Ky është ndryshimi kryesor midis dy modeleve. Diagrami i tipit cobweb është një "zinxhir shkakor" i paraqitur në këtë formë:

$$\begin{array}{ccccccc} q_1 & & q_2 & & q_3 & & \ldots\ldots \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\ p_1 & & p_2 & & p_3 & & \end{array}$$

Kjo do të thotë se q_1 përcakton p_1, i cili bëhet përcaktues për q_2 e kështu me radhë dhe në thelb kjo është e ndryshme nga përcaktimi i njëkohshëm i funksionit të kërkesës dhe ofertës. Faktorë të ndryshëm natyrorë në bujqësi diktojnë luhatje të cikleve të prodhimit, por kryesore është përcaktimi i tendencës për të shkuar drejt pikës së ekuilibrit. Në projektimin e çmimeve dhe sasisë së prodhimit për vitet e ardhshëm, ekonomistët duhet të studjojnë edhe trendet në variablat popullsi dhe produktivitet.

Duke përdorur simbole, vektorë e matrica ndërtohen modele madje dhe shumëpërmasore, linearizimi i të cilave bëhet i mundur. Ndërveprime që lindin midis tregjeve për dy produkte,

Dieci,R. (2009) mund të çojnë në formimin e një sistemi jolinear edhe duke filluar nga modeli linear cobweb. Është e qartë se kërkesa dhe oferta nuk veprojnë në mënyrë simetrike dhe çdo lloj planifikimi ekonomik kërkon analizë rekursive. Kjo është veçanërisht e dobishme në bujqësi ku ndikimi i faktorëve të jashtëm shpesh është përcaktues.

Parashikimet afatgjata, tregëtia,çmimet,prodhimi, konsumi,shpenzimet,etj kërkojnë programe të ndryshme e për këtë qëllim duhen modele më të mira cobweb dhe sisteme më të përparuar rekursivë. Metoda cobweb është një nga mjetet më të rëndësishme jo vetëm për parashikimin praktik, por edhe për teori reale ekonomike.

2.3.2 Modeli Cobweb me pritshmëri adaptive

Modeli Cobweb me pritshmëri adaptive u prezantua për herë të parë nga Nerlove (1958) dhe paraqet një ekonomi me agjentë ekonomikë që shfaqin sjellje adaptive për pritshmërinë e çmimeve. Mund të argumentohet se të presësh çmimin e periudhës së ardhshme njësoj si të asaj paraardhëse është shumë naive dhe nuk merr parasysh ndryshimet në çmime si dhe mësimin nga gabimet e viteve të kaluara. Prandaj është e mundur të përcaktohen *pritshmëritë adaptive* si një model ku çmimi i pritshëm është një përshtatje e gabimeve të parashikimeve të viteve të kaluara. Më specifikisht:

$$P_t^e = P_{t-1}^e - \theta(P_{t-1}^e - P_{t-1}) \tag{2.32}$$

ku për $\theta = 1$ shkojmë në modelin e mëparshëm i cili mund të konsiderohet një rast i veçantë i modelit me pritshmëri adaptive. Modeli i plotë mund të paraqitet :

$$\begin{aligned} D_t &= a - bp_t, \quad b > 0 \quad (kerkesa) \\ S_t &= c + dP_t^e + \lambda_t, \quad d > 0 \quad (oferta) \\ P_t^e &= P_{t-1}^e - \theta(P_{t-1}^e - P_{t-1}) \quad 0 \le \theta \le 1 \\ D_t &= S_t \end{aligned} \tag{2.33}$$

Duke zgjidhur këtë model hap pas hapi:

$$P_t^e = P_{t-1}^e - \theta(P_{t-1}^e - P_{t-1}) \tag{2.34}$$

$$\therefore P_t^e = (1-\theta)P_{t-1}^e + \theta P_{t-1} \tag{2.35}$$

Nga ana tjetër:

$$P_t^e = \frac{S_t-(c+\lambda_t)}{d} = \frac{D_t-(c+\lambda_t)}{d} = \frac{a-bp_t-(c+\lambda_t)}{d} \tag{2.36}$$

$$\therefore P_{t-1} = \left(\frac{a-(c+\lambda_t)}{d}\right) - \left(\frac{b}{d}\right) P_{t-1} \tag{2.37}$$

Arrihet në përfundimin:

$$a - bp_t = (c + \lambda_t) + d(1-\theta)\left[\left(\frac{a-(c+\lambda_t)}{d}\right) - \left(\frac{b}{d}\right) P_{t-1}\right] + d\theta P_{t-1} \tag{2.38}$$

$$P_t = \theta\left(\frac{a-(c+\lambda_t)}{d}\right) + \left[1 - \theta - \left(\frac{\theta d}{b}\right)\right] P_{t-1} \tag{2.39}$$

Duke e marrë $P_t = P_{t-1} = \cdots = P^*$ për të gjitha *t* merret i njëjti çmim eikulibri, $P^* = \left(\frac{a-(c+\lambda_t)}{b+d}\right)$. Si në modelin e mëparshëm më të thjeshtë, me shmangie nga ekuilibri përftohet zgjidhja:

$$P_t - P^* = \left[1 - \theta - \left(\frac{\theta d}{b}\right)\right]^t (p_0 - P^*) \tag{2.40}$$

Nëse shprehja në kllapa shënohet *D* atëherë që ky model të japë një zgjidhje konvergjente luhatëse është e nevojshme që -1$-1 < D < 0$, pra duhet të përmbushet kushti

$$\frac{1}{\theta} - 1 < \frac{d}{b} < \frac{2}{\theta} - 1 \tag{2.41}$$

Ka shumë përcaktime të ndryshme për pritshmëritë e çmimit ku secili çon në një model të ri dhe të ndryshëm. Modeli i mëposhtëm i paraqitur nga [Goodwin, 1947]

$$P_t^e = P_{t-1} + \mu(P_{t-1} - P_{t-2}) \tag{2.42}$$

ku μ është koeficienti i pritshmërive. Në qoftë se $\mu = 0$ atëherë $P_t^e = P_{t-1}$, i cili është formulimi original. Në qoftë se $\mu > 0$ çmimi pritet të lëvizë në të njëjtin drejtim si në të shkuarën, ndërsa kur $\mu < 0$ çmimi pritet që të lëvizë në drejtim të kundërt. Lëvizjet e çmimit janë të lidhura ngushtë dhe shumë të varura nga madhësia e μ. Modeli i plotë merr formën e mëposhtme:

$$\begin{aligned} D_t &= a - bp_t, \qquad b > 0 \qquad (kerkesa) \\ S_t &= c + dP_t^e + \lambda_t, \qquad d > 0 \qquad (oferta) \\ P_t^e &= P_{t-1} + \mu(P_{t-1} - P_{t-2}) \\ D_t &= S_t \end{aligned} \tag{2.43}$$

Duke zëvendësuar ekuacionin e pritshmërisë në ekuacionin e ofertës dhe më pas duke e barazuar me kërkesën, gjendet:

$$a - bp_t = (c + \lambda_t) + d[P_{t-1} + \mu(P_{t-1} - P_{t-2})] \tag{2.44}$$

pra:

$$P_t = \left(\frac{a-(c+\lambda_t)}{d}\right) - \left(\frac{b}{d}\right)(1+\mu)P_{t-1} + \left(\frac{d\mu}{b}\right)P_{t-2} \qquad (2.45)$$

i cili është një ekuacion i rendit të dytë.

Ndërtimi i modelit

Ecuria e çmimeve me kalimin e kohës në një model Cobweb me pritshmëri adaptive i dhënë klasikisht nga Goodwin (1947), studjohet duke rindërtuar modelin, por ndryshe nga modelet e mëparshme do të merret parasysh shoku i prodhimit λ_t. Simulimet kompjuterike do të kryhen për dy raste të λ_t. Në modelin e parë do të zgjidhet λ_t konstante, kurse në modelin e dytë do të vendosen vlera rastësore të λ_t, të cilat përftohen nga simulime kompjuterike rastësore për vlera të ndryshme të devijimit standart siç do të tregohet më poshtë.

A. Modeli i konvergjencës së çmimeve ku shoku i ofertës μ është konstant

Në këtë model do të caktohet një vlerë konstante e shokut të ofertës λ_t dhe do ta mbahet i njëjtë për të gjitha rastet e ndërtuara me qëllim që të krahasohet ndërmjet koeficientëve të ndryshëm të pritshmërisë μ. Do të japen pesë vlera të ndryshme të μ dhe do të krahasohet konvergjenca ose divergjenca e çmimeve në varësi të μ.

Modeli do të mbështetet në formulën (2.45) që tregon ecurinë e çmimit me kalimin e periudhave:

$$P_t = \left(\frac{a-(c+\lambda_t)}{d}\right) - \left(\frac{b}{d}\right)(1+\mu)P_{t-1} + \left(\frac{d\mu}{b}\right)P_{t-2} \qquad (2.46)$$

Fillimisht caktohen koeficientët e përgjithshëm për të gjitha rastet e vlerave të ndryshme të μ.

$$a = 120\,,\ \ b = 2\,, \lambda_t = 5\ \ , c = 30\ ,\ \ d = 1\ , P_0 = 15\,,\ \ P_1 = 19$$

Shqyrtohen pesë vlera të μ: $\mu_1 = -1,\quad \mu_2 = -1.4,\quad \mu_3 = -1.9,\quad \mu_4 = +1,\quad \mu_5 = 0.$
Në të pestë rastet, çmimi i ekuilibrit, i dhënë në mënyrë teorike siç u tregua më lart, do të jetë:

$$P^* = \left(\frac{a-(c+\lambda_t)}{b+d}\right) = \left(\frac{120-(30+5}{2+1}\right) = 28.\overline{3} \qquad (2.47)$$

Koeficientët janë zgjedhur të njëjtë Giancarlo (1979), në mënyrë çmimi i ekuilibrit i cili nuk varet nga μ të mos ndryshojë dhe krahasimi për katër rastet të bëhet vetëm në varësi të koeficientit të pritshmërisë μ.

Rasti 1: Koeficienti i pritshmërisë $\mu_1 = -1$

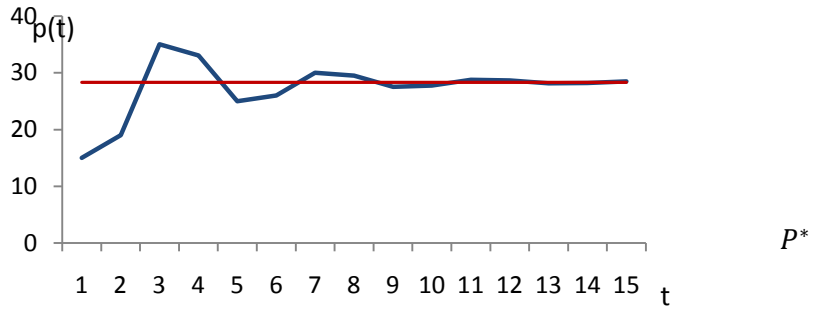


Figura 2.2: Konvergjenca e modelit me koeficient $\mu_1 = -1$

Burimi: Përpunime të autorit

Rasti 2: Koeficienti i pritshmërisë $\mu_2 = -1.4$

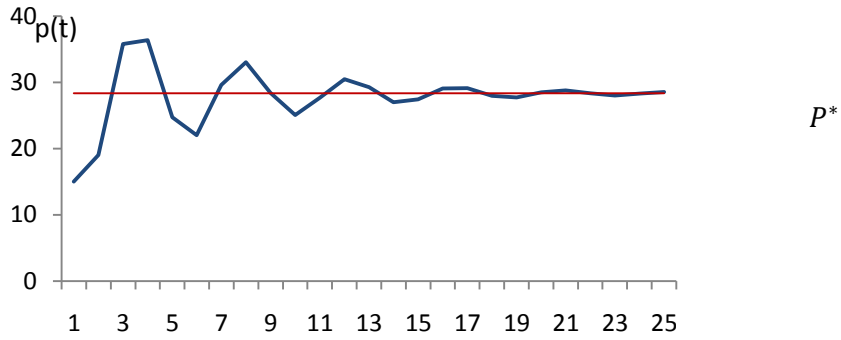


Figura2.3: Konvergjenca e modelit koeficient $\mu_2 = -1.4$

Burimi: Përpunime të autorit

Rasti 3: Koeficienti i pritshmërisë $\mu_4 = +1$

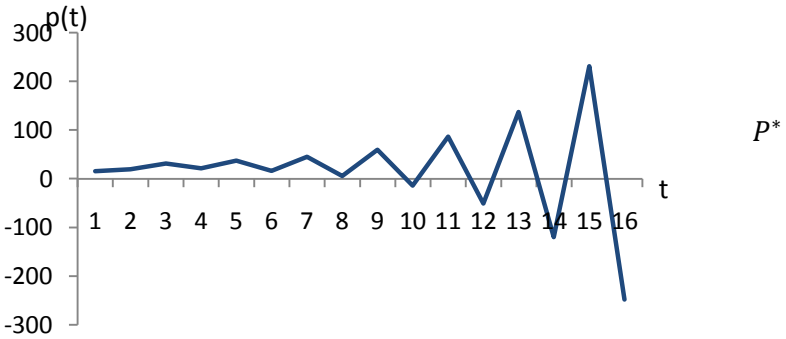


Figura 2.4:Konvergjenca e modelit me koeficient $\mu_4 = +1$

Burimi: Përpunime të autorit

.

Rasti 4: Koeficienti i pritshmërisë $\mu_4 = 0$

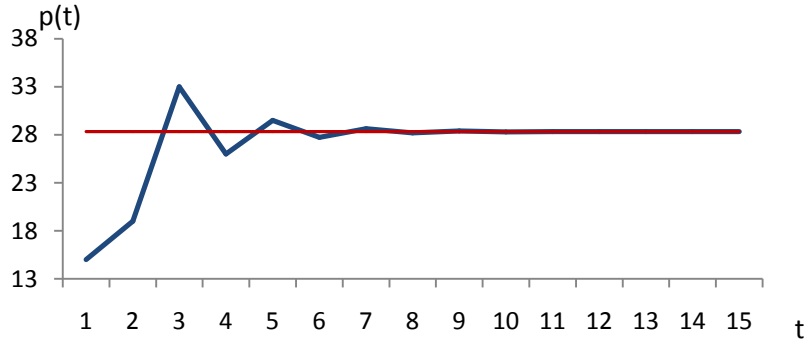


Figura 2.5: Konvergjenca e modelit me koeficient $\mu_5 = +1$.

Burimi: Përpunime të autorit

Përfundime

Simulimet e mësipërme kompjuterike, tregojnë se modeli konvergjon ose divergjon sipas kushteve të ndryshme dhe vlerave të μ.

Kur $\mu = 0$ sistemi konvergjon si në rastin e modelit Cobweb me pritshmëri naive. Gjithashtu sa më e vogël të jetë μ aq më ngadalë konvergjon sistemi. Kur $\mu = 0$ sistemi konvergjon afërsisht pas 7-8 periodash, për $\mu = -1$ sistemi konvergjon pas 10-12 periodash, për $\mu = -1.4$ sistemi shkon drejt çmimit të eikuilibrit pas 20-24 periodash, dhe për $\mu = -1.9$ sistemi do më shumë se 65 perioda të konvergjojë.

B. Modeli i konvergjencës së çmimeve ku shoku i ofertës μ është rastësor

Në modelin cobweb me shok rastësor të ofertës, nëse λ_t është konstante, ajo nuk ka efekt mbi konvergjencën e çmimit përveçse ndryshon çmimin e eikuilibrit. Mirëpo në një ekonomi reale λ_t nuk do të jetë gjithmonë konstante. Ajo mund të variojë me vlera negative dhe pozitive. Një λ_t pozitive, pra një rritje në ofertën e një produkti, do të lidhej ngushtë me avancime teknologjike në periudhën *t* ose kushte atmosferike të favorshme për rritjen e një produkti. Një λ_t negative, pra një zvogëlim në ofertën e një produkti, do të thoshte kushte jo të favorshme atmosferike si psh. katastrofa natyrore etj. Duke u nisur nga fakti që këto kushte natyrore janë deri diku te paparashikueshme duhet që në model të adaptohet gjithashtu një λ_t rastësore.

Në një ekonomi reale prodhimi mund të jetë normal ($\lambda_t = 0$), por mund të ndodhin gjithashtu katastrofa të skajshme natyrore . Skenari i parë ka shumë probabilitet të ndodhë, ndërsa i dyti jo dhe aq. Stjudohen këto skenare duke përdorur një shpërndarje normale të vlerave të λ_t.

Për të ndërtuar një shpërndarje normale duhet përcaktuar *mesastarja dhe devijimi standart.* Mesatarja matematike në këtë studim është marrë 0 ($\bar{X} = 0$) duke u nisur nga arsyetimi logjik se në shumicën e rasteve nuk ka as katastrofa natyrore as zhvillime teknologjike.

Nga ana tjetër, *devijimi standart* σ, mund të ndryshojë për ekonomi dhe skenare të ndryshme. Në një ekonomi të avancuar, prodhimi ka më pak mundësi të ndikohet nga kushtet natyrore se sa në disa vende bujqësore të pazhvilluara. Në rastin e parë shoku i prodhimit ka më pak mundësi të variojë nga vlera mesatare dhe devijimi standart do jetë më i vogël krahasuar me rastin e dytë. Janë ndërtuar tre skenare me devijime standarte të ndryshme për t'i krahasuar ndërmjet tyre.

.

Ndërtimi i modelit

Për studimin e çmimit në lidhje me kohën përdoret formula (2.45)

$$P_t = \left(\frac{a-(c+\lambda_t)}{d}\right) - \left(\frac{b}{d}\right)(1+\mu)P_{t-1} + \left(\frac{d\mu}{b}\right)P_{t-2} \qquad (2.46)$$

e cila mund të transformohet

$$P_t = \left[\left(\frac{a-c}{d}\right) - \left(\frac{b}{d}\right)(1+\mu)P_{t-1} + \left(\frac{d\mu}{b}\right)P_{t-2}\right] - \frac{\lambda_t}{d} \qquad (2.47)$$

Ku λ_t do të përcaktohet në mënyrë rastësore me anë të kompjuterit duke ndërtuar simulime numerike me shpërndarje normale dhe do jetë e ndryshme për çdo periudhë.
Për arësye krahasuese do të përdoren koeficientet që u përdorën në modelin me λ_t konstante dhe $\mu = -1.4$, $a = 120$, $b = 2$, $c = 30$, $d = 1$, $P_0 = 15$, $P_1 = 19$.

Çmimi i ekuilibrit me këto konstante do të jetë $P^* = \left(\frac{a-c}{b+d}\right) = \left(\frac{120-30}{2+1}\right) = 30$

Ndërtohen tre skenare me devijime standarte σ të ndryshme:

$$\sigma_1 = 1 \quad ku \quad -3 \le \lambda_t \le 3 \quad me\ 95\%\ siguri$$
$$\sigma_2 = 3 \quad ku \quad -9 \le \lambda_t \le 9 \quad me\ 95\%\ siguri$$
$$\sigma_3 = 6.5 \quad ku \quad -19.5 \le \lambda_t \le 19.5 \quad me\ 95\%\ siguri$$

Skenari i parë: $\sigma_1 = 1$

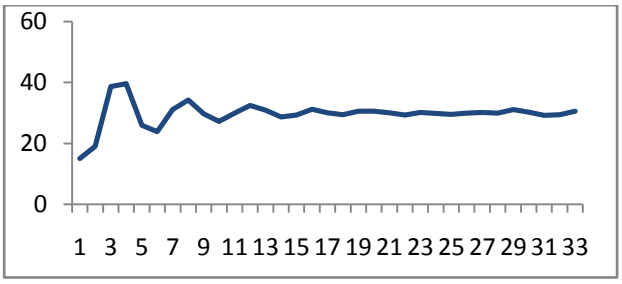


Figura 2.6: Konvergjenca e modelit me λ_t të rastësishme me $\sigma_1 = 1$
Burimi: Përpunime të autorit

Skenari i dytë: $\sigma_2 = 3$

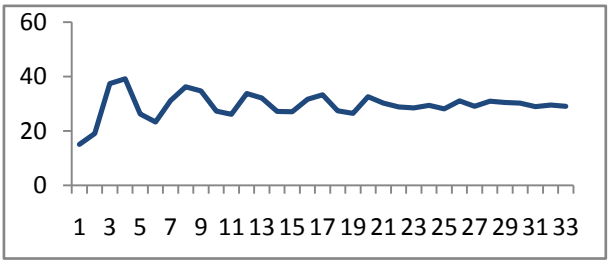


Figura 2.7: Konvergjenca e modelit me$\lambda_t$të rastësishme me $\sigma_1 = 3$.
Burimi: Përpunime të autorit

Skenari i tretë: $\sigma_3 = 6.5$

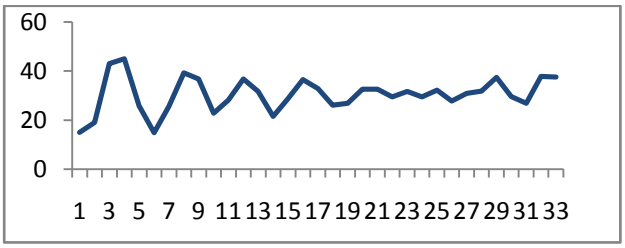


Figura 2.8: Konvergjenca e modelit me$\lambda_t$të rastësishme me $\sigma_1 = 6.5$.
Burimi: Përpunime të autorit

Përfundime

Rastet e mësipërme tregojnë se me rritjen e devijimit standart modeli konvergjon më ngadalë drejt çmimit të ekuilibrit. Kur devijimi standart është 1 modeli konvergjon lehtë, por kur ai rritet, është e vështirë të konvergjojë sepse shoku i prodhimit luan një rol më vendimtar në çdo periudhë.

Këto modele konsiderohen si më realiste për një ekonomi, megjithëse shumë supozime ndërtohen për pritshmëritë adaptive që mund të mos jenë të tilla kur aplikohen në një ekonomi reale, prandaj përmirësimi i modelit bëhet duke marrë parasysh sjellje të ndryshme të agjentëve ekonomikë.

2.3.3 Modeli cobweb me funksion jolinear të kërkesës

Kufizimet në përdorimin e modelit linear kanë çuar në përmirësimin e modelit duke e zëvendësuar atë me model jolinear.

Duke përdorur modelin dinamik cobweb me pritshmëri adaptive, mund të nxirren përfundime mbi sjelljen dinamike të tilla si qëndrueshmëria, bifurkacioni dhe kaosi. Bärbel Finkenstädt, Peter Kuhbier (1996) paraqesin modelin me funksion jolinear të kërkesës.

Në rast se oferta është një funksion linear i dhënë nga:

$$(P_t^*) = a + bP_t^* \quad \text{për} \quad P_t^* > \max\left(0, \frac{-a}{b}\right); b > 0 \tag{2.48}$$

Kërkesa është një funksion jolinear me konstante të elasticitetit

$$D(P_t) = \frac{c}{P_t} \text{ për } P_t > 0;\ c > 0 \tag{2.49}$$

Pastrimi i tregut kërkon:

$$S(P_t^*) = D(P_t) \tag{2.50}$$

Çmimi i parashikuar për periudhën është një kombinim linear i pritshmerisë së parashikuar dhe çmimit të realizuar:

$$P_t^e = (1-\theta)P_{t-1}^e + \theta P_{t-1}\ , \qquad 0 < \theta < 1 \tag{2.51}$$

ku θ është koeficienti i pritshmërisë. Duke zëvendësuar te (2.50) dhe duke përdorur (2.51), gjendet një ekuacion diference i rendit të parë me anën e të cilit përcaktohet çmimi në çdo periudhë

$$P_t = F(P_{t-1}) = \frac{cP_{t-1}}{\theta b P_{t-1}^e + a\theta P_{t-1} + c(1-\theta)} \tag{2.52}$$

Pa efekte në modelin dinamik mund të transformohet çmimi,kërkesa dhe oferta:

$$p_t = \frac{b}{|a|}P_t, \qquad p_t^* = \frac{b}{|a|}P_t^* \tag{2.53}$$

$$S(P_t^*) = |a|s(p_t^*), \qquad D(P_t^*) = |a|d(p_t) \tag{2.54}$$

kështu funksioni i ofertes është dhënë nga:

$$s(p_t^*) = \frac{a}{|a|} + p_t^* \quad \text{për} \quad p_t^* > max(0, sign(a)) \tag{2.55}$$

Relacioni i kërkesës mund të gjendet si:

$$d(p_t) = \frac{c}{a^2 p_t} \tag{2.56}$$

Duke patur parasysh (2.51) çmimi që do të jetë si mekanizëm rregullues i tregut është:

$$p_t = f(p_{t-1}) = \frac{\frac{cb}{a^2}p_{t-1}}{\theta b\, p_{t-1}^2 + \theta\frac{a}{|a|}p_{t-1} + (1-\theta)\frac{cb}{a^2}} \tag{2.57}$$

Duke shënuar $d = \frac{cb}{a^2} > 0$ (2.57) paraqitet në këtë mënyrë:

$$p_t = f(p_{t-1}) = \frac{dp_{t-1}}{\theta b\, p_{t-1}^2 + \theta\frac{a}{|a|}p_{t-1} + d(1-\theta)} \tag{2.58}.$$

Ekuacioni është një ekuacion diference i rendit të parë .

Analiza e ndjeshmërisë

Studimi i sjelljes dinamike të (2.58) është komplekse duke konsideruar se parametri i pritshmërisë është një element përcaktues dhe duke patur parasysh se çmimi është pozitiv emëruesi do të jetë pozitiv $a \geq 0$ ose nëse $a < 0$ atëherë

$$4d > \frac{\theta}{1-\theta} \tag{2.59}$$

Maksimumi i vetëm i (2.58) është $p_{max} = \sqrt{\frac{d(1-\theta)}{\theta}}$ dhe ka dy pika fikse: $p = 0$ dhe $\bar{p} = -\frac{1}{2}\frac{a}{|a|} + \sqrt{d + \frac{1}{4}}$.

Sjellja e çmimit ekuilibër varet nga vlera e derivatit të funksionit në pikën fikse të tij. Derivati i parë i (2.58) jepet nga:

$$f'(p_{t-1}) = \frac{-dp_{t-1}^2 + d^2(1-\theta)}{(\theta p_{t-1}^2 + \theta\frac{a}{|a|}p_{t-1} + d(1-\theta))^2} \tag{2.60}$$

Nëse $|f'(p_{t-1})| < 1$, pika fikse është pika e vetme e qëndrueshmërisë dhe çmimet konvergjojnë drejt çmimit ekuilibër $\bar{p}$. Pika fikse është jo e qëndrueshme nëse

$$f'(p_{t-1}) < -1 \tag{2.61}$$

Ky mosbarazim plotësohet nëse

$$\frac{a\theta}{|a|d}\bar{p} < 2(\theta - 1) < 0 \tag{2.62}$$

Në rastin kur $a < 0$, $\bar{p}$ do të jetë jo e qëndrueshme për kushtin:

$$\frac{\theta}{1-\theta} > \frac{2d}{\frac{1}{2}+\sqrt{d+\frac{1}{4}}} \tag{2.63}$$

Analizohet sjellja dinamike e (2.13) duke marrë:

$a = -1, b = 1.5, c = 0.6$ kështu $d = \frac{cb}{a^2} = 0.9$

Ekuacioni (2.58) merr pamjen

$$p_t = f(p_{t-1}) = \frac{0.9p_{t-1}}{\theta 1.5p_{t-1}^2 - \theta p_{t-1} + 0.9(1-\theta)} \tag{2.64}$$

Kushti (2.59) plotësohet nëse

$$\theta < \frac{4d}{1+4d} = 0.782608 = \theta_{fin} \tag{2.65}$$

Pikëpreja e grafikut me drejtezën nën kënd 45^o është:

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \sqrt{0.9 + \frac{1}{4}} = 1.572380 \tag{2.66}$$

Kjo do të jetë e vetmja pikë e qëndrueshme e ekuilibrit derisa $\theta_1 = 0.782608$ e cila merret saktësisht kur $f'(p_{t-1}) = -1$ Mulla P. (2014).Nëse kryhet $f(f(p_{t-1})$ do të kemi dy pika fikse dhe shfaqet bifurkacioni.

2.3.4 Modeli cobweb me agjentë heterogjenë

Që nga futja e tij në vitet gjashtëdhjetë nga Muth (1961) dhe popullarizimin e tij në makro-ekonomi nga Lucas (1971), hipoteza e pritshmërive racionale (REH) është bërë paradigmë dominuese në formimin e pritshmërive në teorinë ekonomike. Në një model me pritshmëri racionale agjentët kanë njohuri të përsosura në lidhje me ekuacionet e ekuilibrit të tregut dhe i përdorin këto për të formuar pritjet e tyre. Edhe pse në ditët e sotme shumë ekonomistë i shohin pritjet racionale si diçka joreale, ato ende shihen si një pikë e rëndësishme. Më vonë Keynes argumentoi se një vlerësim krejtësisht racional në tregjet financiare nuk mjafton dhe se rol të rëndësishëm luan psikologjia dhe sjellja njerëzore. "*Investimet në bazë të pritjeve afatgjata janë aq të vështira sa është zor të jenë praktike. Ai që tenton këtë me siguri është i drejtuar drejt rreziqeve më të mëdha se ai që që përpiqet të mendojë më mirë se turma, se si turma do të sillet, dhe ai mund të bëjë gabime më shumë katastrofike*" Keynes (1936)

Në tregjet reale financiare, tregtarët janë të ndryshëm, veçanërisht në lidhje me pritjet e tyre rreth çmimeve të ardhshme dhe dividentëve.

Vitet e fundit, një numër i madh i modeleve me agjentë heterogjenë është futur në ekonomi dhe financë. Shumë autorë si Arthur et al. (1997), Brock and Hommes (1997, 1998, 2004), Brock and LeBaron (1996), Chiarella (1992), Chiarella and He (2000,2001), De Grauwe et al. (1993), De Long et al. (1990ab), Farmer and Joshi (2002), de Fontnouvelle (2000), Franke,R. (1999), Gaunersdorfer and Hommes (2000), Lassell (2004), e të tjerë theksojnë se hipotezat heterogjene të tregut, janë një alternativë e re për hipotezat efikase të tij.

Në të gjitha këto modele agjentë heterogjenë të grupeve të ndryshme të tregtarëve, kanë besime të ndryshme ose pritjet, bashkëekzistojnë.

Prodhuesit duhet të formojnë pritjet e çmimeve një periudhë përpara . Oferta S (p_t^e) është një funksion i çmimeve të pritshme p_t^e dhe rrjedh nga maksimizimi i fitimit të pritshëm

$$S(p_t^e) = argmax_{q_t}\left(p_t^e q_t - c(q_t)\right) = (c^{'})^{-1}(p_t^e) \tag{2.83}$$

ku $c(.)$ është një funksion rritës. Kurba e ofertës përkon me inversin e kurbës margjinale të kostos. Çmimi i pritur mund të jetë një funksion i çmimit e fundit, që është

$$p_t^e = H\left(\vec{P}_{t-1}\right), \tag{2.84}$$

ku $\vec{P}_{t-1} = (p_{t-1}, p_{t-2}, \dots, p_{t-L})$ tregon vektorin e çmimeve me L-lag dhe H(.) është një rregull parashikimi. Kërkesa konsumatore D varet nga çmimi aktual p_t.Do të supozohet se kërkesa është funksion zbritës. Nëse besimet janë homogjenë, domethënë, të gjithë prodhuesit përdorin të njëjtin parashikues, dinamika e çmimeve të ekuilibrit të tregut në modelin cobweb është dhënë nga

$$D(p_t) \;\; = S(\, H\left(\vec{P}_{t-1}\right)) \quad \text{ose } p_t = D^{-1}S\left(\, H\left(\vec{P}_{t-1}\right)\right) \tag{2.85}$$

Dinamika aktuale e çmimeve të ekuilibrit në këtë mënyrë varet nga kurba e kërkesës D, kurba e furnizimit S si dhe parashikuesi H i përdorur nga prodhuesit. Nëse të gjithë prodhuesit kanë pritjet racionale ose largpamësi të përsosur, parashikimi i tyre përkon saktësisht me çmimin e realizuar $H^R\left(\vec{P}_{t-1}\right) = p_t$, dhe dinamika e çmimeve të realizuar bëhet shumë e thjeshtë: $p_t = p^*$ në të gjitha periudhat, ku p * është pikë ekuilibri.

Nëse, nga ana tjetër, të gjithë prodhuesit përdorin pritshmëritë naive,

$$H^R\left(\vec{P}_{t-1}\right) = p_{t-1} \tag{2.86}$$

dinamika e çmimeve është dhënë nga

$$p_t = D^{-1}S\left(\vec{P}_{t-1}\right) \tag{2.87}$$

e cila është e njohur nga modeli cobweb.

Sjelljet heterogjene

Heterogjeniteti në formimin e pritshmërive është studjuar duke futur konceptin e ekuilibrit dinamik racional adaptiv (ARED), Brock,Homs (1997), si një bashkim midis dinamikës së ekuilibrit të tregut dhe zgjedhjes së parashikuesit adaptiv.

ARED është një dinamikë evolutive mes strategjive konkuruese të parashikimit. Agjentët mund të zgjedhin nga strategjitë e ndryshme të parashikimit dhe të formojnë pritshmëritë e tyre përgjatë kohës në varësi të matjes së përformancës së strategjive të zgjedhura. Ekuilibri i tregut në modelin cobweb me pritshmëri heterogjene përcaktohet nga

$$D(p_t) = \sum_{j=1}^{J} n_{j,t-1}\, S(H_j\left(\vec{P}_{t-1}\right)) \tag{2.88}$$

ku H_j, $1 \le j \le J$,paraqesin strategjitë e tipit j dhe $n_{j,t-1}$ si pjesë e agjentëve duke përdorur strategjinë j në fillim të periudhës *t*.

Një analizë e modelit cobweb me dy lloje tregu dhe kërkesë e ofertë lineare, shqyrtohet në rastin kur kërkesa është funksion linear zbritës

$$D(p_t) = a - dp_t, \qquad d > 0. \tag{2.89}$$

dhe kurba e ofertës është lineare e dhënë nga

$$S(p_t^e) = s(p_t^e), \qquad s > 0, \tag{2.90}$$

ose ekuivalente, funksioni i kostos së prodhimit është i fuqisë së dytë $c(q) = \frac{q^2}{2s}$.

Agjentët mund të investojnë për një pritje racionale (largpamësi të përsosur) me parashikim perfekt, që kushton C ≥ 0, ose që formojnë parashikimin e thjeshtë naiv pa kosto.

Të dy rregullat e parashikimit janë dhënë në këtë mënyrë nga

$$H_1\left(\vec{P}_{t-1}\right) = p_t \tag{2.91}$$

$$H_2\left(\vec{P}_{t-1}\right) = p_{t-1} \tag{2.92}$$

Ekuilibri i tregut në modelin cobweb me pritjet racionale kundrejt pritjeve naive dhe kërkesës e ofertës lineare jepet nga:

$$a - dp_t = n_{t-1}^R sp_t + n_{t-1}^N sp_{t-1} \tag{2.93}$$

ku n_{t-1}^R dhe n_{t-1}^Ntregojnë pjesët e produktit duke përdorur përkatësisht parashikuesit racionalë dhe naive në periudhën *t*. Kostoja e informacionit është shtesë për prodhuesin që përdor pritshmëritë racionale. Sipas barazimit të mësipërm përcaktohet çmimi ekuilibër

$$p_t = \frac{a - n_{t-1}^N sp_{t-1}}{d + n_{t-1}^R s} \tag{2.94}$$

Modeli me pritshmëri racionale kundrejt atyre naive mund të shihet si model parashikues i përpunuar në të cilin pritjet racionale paraqesin parashikim stabilizues, por të kushtueshëm dhe pritjet naive një parashikim të thjeshtë, por potencialisht destabilizues.Hommes (2011,2013).

Për të kompletuar modelin duhet të specifikohet se si përcaktohen raportet e pritshmërive racionale dhe naive. Këto raporte ndryshojnë me kalimin e kohës dhe përcaktohen mbi bazën e performancës së secilit parashikues dhe marrim fitimin e realizuar për të përcaktuar disa parashikues. Për strategjinë e parashikimit me pritje racionale (2.91) dhe ofertë lineare (2.90), fitimi i realizuar në periudhën t jepet nga:

$$\pi_t^R = p_t\, S(p_t) - cS(p_t) = \frac{s}{2} p_t^2 \tag{2.95}$$

Fitimi neto i realizuar për pritjet racionale është dhënë në këtë mënyrë nga $\pi_t^R - C$, ku C është kostoja e informacionit për një periudhë që duhet për marrjen e një parashikimi të përsosur. Për parashikuesin naiv (2.92) me ofertë lineare fitimi i realizuar në peridhën t është

$$\pi_t^N = p_{t-1}\, S(p_{t-1}) - cS(p_{t-1}) = \frac{s}{2} p_{t-1}(2p_t - p_{t-1}) \tag{2.96}$$

Raportet e dy grupeve janë përcaktuar nga modeli diskret i Anderson, de Palma dhe Thisse (1992), për propabilitetin në kontekse të ndryshme ekonomike, për zgjedhjen e strategjive të parashikimeve. Ky raport është:

$$n_t^R = \frac{exp\left(\beta\left(\pi_t^R - C\right)\right)}{exp\left(\beta\left(\pi_t^R - C\right)\right) + exp\beta\left(\pi_t^N\right)} \tag{2.97}$$

dhe raporti me parashikues naiv në periudhën t është

$$\pi_t^N = 1 - \pi_t^R \tag{2.98}$$

Një tipar i rëndësishëm i kësaj përzgjedhje është se agjentet janë me racionalitet të kufizuar, në kuptimin që shumica e agjentëve përdorin parashikues që kanë fitim më të lartë.

Parametri β është intensiteti i zgjedhjes dhe mat se sa shpejt parashikuesit zgjedhin mes dy strategjive të parashikimit.

Analizohen dy rastet ekstreme: $\beta = 0$ dhe $\beta = \infty$.

Për $\beta = 0$ të dy raportet janë të fiksuara me kalimin e kohës dhe të barabartë me 1/2.

Ekstremi tjetër $\beta = \infty$, korespondon me rastin në të cilën agjentët janë me racionalitet të pakufizuar dhe të gjithë prodhuesit zgjedhin parashikues optimalë në çdo periudhë. Prandaj,sa më i lartë të jetë intensiteti i zgjedhjeve, aq më racionale janë në sensin e përshtatshmërisë evolutive kur zgjedhin strategjitë e parashikimit.

Rasti $\beta = \infty$ luan një rol të rëndësishëm të paraqitur më poshtë:

Koha e përzgjedhjes së parashikuesve në (2.97) është e rëndësishme. Te (2.94) raportet e vjetra n_{t-1}^N dhe n_{t-1}^R përcaktojnë çmimin e ri të ekuilibrit.Ky çmim i ri është përdorur te (2.95) dhe (2.96) për zgjedhjen e parashikuesve,raporteve të reja n_t^R dhe n_t^N që përdoren te (2.97) dhe (2.98). Këto raporte përdoren në përcaktimin e çmimit të ekuilibrit p_{t+1} etj. Çmimi i ekuilibrit dhe raportet në këtë mënyrë bashkëevolojnë në lidhje me kohën. Është e përshtatshme të përcaktohet ndryshimi midis dy raporteve:

$$m_t \equiv n_t^R - \quad n_t^N \tag{2.99}$$

Nëse $m_t = -1$ do të thotë se të gjithë prodhuesit përdorin pritshmëri naive, ndërsa kur m_t=+1 do të thotë se prodhuesit preferojnë parashikuesin racional të pritshmërive. Evolucioni i çmimit të ekuilibrit, p_t ,dhe diferenca e raporteve, m_t, paraqiten në një sistem jolinear dinamik:

$$p_t = \frac{a - n_{t-1}^N sp_{t-1}}{d + n_{t-1}^R s} = \frac{2a - (1 - m_{t-1}) sp_{t-1}}{2d + (1 + m_{t-1}) s} \tag{2.100}$$

$$m_t = \left(tanh \frac{\beta}{2} (\pi_t^R - \quad n_t^N - C) \right)$$

Sistemi është një bashkim midis çmimit dinamik të ekuilibrit dhe zgjedhjes së parashikuesit adaptiv në modelin ARED. Për kurbën lineare të ofertës, duke përdorur (2.95) dhe (2.96) diferenca e fitimit të realizuar e agjentëve racionale dhe naivë, mund të thjeshtohet si më poshtë:

$$n_t^R - \quad n_t^N = \frac{s}{2} (p_t - p_{t-1})^2 \tag{2.101}$$

dhe është proporcionale me katrorin e gabimit të parashikimeve naive. Në rastin e funksionit linear të kërkesës dhe ofertës modeli ARED paraqitet:

$$p_t = \frac{2a - (1 - m_{t-1}) sp_{t-1}}{2d + (1 + m_{t-1}) s} \tag{2.102}$$

$$m_t = \left(tanh\frac{\beta}{2}(\frac{s}{2}(p_t - p_{t-1})^2 - C)\right) \quad (2.103)$$

Modeli ka një pikë të vetme qëndrueshmërie $(p^*, m^*) = \left(\frac{a}{d+s}, \tanh(-\frac{\beta C}{2})\right)$ ku , p^* është çmimi i ekuilibrit dhe rishkruhet (2.102) , (2.103) duke devijuar nga çmimi i ekuilibrit

$$x_t = \frac{-(1-m_{t-1})sx_{t-1}}{2d+(1+m_{t-1})s} \quad (2.103)$$

$$m_t = \left(tanh\frac{\beta}{2}\left(\frac{s}{2}(x_t - x_{t-1})^2 - C\right)\right) \quad (2.104)$$

Për modelin ARED të dhënë në (2.103) ,(2.104) përdoret $(x_t, m_t) = F_\beta(x_{t-1}, m_{t-1})$.
Një interes të veçantë ka studimi i dinamikës për të përcaktuar strategji parashikuese kur shkalla e racionalitetit, që është intensiteti i zgjedhur β, bëhet i lartë. Brock, Hommes (1997), Brock et al. (2004).

Qëndrueshmëria lokale e pikave të ekuilibrit

Studimi i sjelljes dinamike të çmimeve dhe fraksioneve në model fillon me kushtet për gjetjen e gjendjes së qëndrueshmërisë $(p^*, m^*) = \left(\frac{a}{d+s}, \tanh(-\frac{\beta C}{2})\right)$ ku , $p^* = \frac{a}{d+s}$ është çmimi i ekuilibrit të tregut. Për C=0 , nuk ka kosto për pritshmëritë racionale dhe $m^* = 0$ kështu që në gjendjen e qëndrueshme fraksionet e dy llojeve janë të barabarta. Në të kundërt, ka shpenzime pozitive të informimit për pritjet racionale, domethënë kur $C > 0, m^* < 0$ në gjendjen e qëndrueshme shumica e agjentëve ndjekin rregullat e studimit naiv të parashikimit. Kjo ka kuptim, sepse në gjendjen e qëndrueshme të dy rregullat e parashikimit japin saktësisht të njëjtin parashikim dhe shumica e agjentëve preferojnë parashikime të lira naive .

Cilësitë e stabilitetit të gjendjes së qëndrueshme janë të përcaktuara nga derivatet e ofertës dhe kërkesës në çmimin p^* të gjendjes së qëndrueshme.
Vlerat e vetjake të matricës jakobiane te (2.102,2.103) janë:

$$\lambda_1 = 0 \text{ dhe} \lambda_2 = \frac{(1-m^*)S'(p^*)}{2D'(p^*)-(1+m^*)S'(p^*)} = \frac{-(1-m^*)s}{2d+(1+m^*)s} < 0 \quad (2.105)$$

përsa kohë që $|m^*| < 1$ vlera vetjake është midis $\frac{S'(p^*)}{D'(p^*)} = -s/d$ dhe 0. Kështu nëse

$$\left|\frac{S'(p^*)}{D'(p^*)}\right| = |-s/d| < 1 \quad (2.106)$$

modeli është i qëndrueshëm kundrejt pritshmërive naive, atëherë në modelin ARED pika e ekuilibrit është e qëndrueshme për të gjitha vlerat e β, çmimi konvergjon te p^* dhe diferenca e fraksioneve te m^*.

Me supozimin se : *Tregu është lokalisht jo i qëndrueshëm kur të gjithë prodhuesit përdorin pritjet naive* dhe (2.106) është e vërtetë, cilësitë e pikës së qëndrueshme në modelin ARED jepen kështu: Lassell (2005)

Propozim

Me supozimin e mësipërm,modeli evolutiv ARED kënaqet kur kostot e informacionit janë zero (C = 0), pika e ekuilibrit është globalisht e qëndrueshme për të gjitha β.

Kur kostoja e informacionit është pozitive ($C > 0$),ekziston një vlerë kritike β_1e tillë që pika e ekuilibrit është globalisht e qëndrueshme për $0 \leq \beta < \beta_1$ dhe jo e qëndrueshme për $\beta > \beta_1$. Nëse $\beta = \beta_1$dhe vlera e dytë vetjake $\lambda_2 = -1$ merret një periode dyfishe bifurkacioni.

Për *(C = 0),*$m^* = 0$ dhe vlerat e veta kënaqin $-1 < \lambda_2 < 0$, pika e ekuilibrit është lokalisht e qëndrueshme.

Qëndrueshmëria lokale ndodh nëse për *C=0* duhet të kemi $m_t \geq 0$ për të gjitha $t \geq 1$, x_t mund të konvergjojë në 0 ose çmimi konvergjon te çmimi ekuilibër. Pjesa e dytë e propozimit del nga studimi i vlerës vetjake $\lambda_2 = -1$ ku gjendja e qëndrueshme e fraksioneve,

$$m^* = \overline{m} = -d/s \tag{2.107}$$

Supozimi nënkupton $-1 < \overline{m} = -\frac{d}{s} < 0$ kur intensiteti i zgjedhjes rritet nga 0 në ∞ dhe diferenca e pikave të qëndrueshme në fraksionet m^* zvogëlohet nga 0 në -1

2.3.5 Modeli cobweb me pritshmëri racionale përballë atij me pritshmëri adaptive

Në këtë pargraf do të shqyrtohet një model i zgjeruar i Brock dhe Hommes (1997) dhe i paraqitur nga Lasell (2004) që fokusohet në rastin e pritshmërive racionale kundrejt atyre naive.

Së pari, konsiderohet futja e një funksioni për pritshmëritë adaptive me dy operatorë lag në vend të pritshmërive naive.

Së dyti, analiza bazohet në numrin relativ të agjentëve që kanë pritshmëri racionale në krahasim me numrin e agjentëve që kanë pritshmëri adaptive, e shënuar me n_1.

Edhe pse ndryshimi i dytë është i lidhur vetëm me paraqitjen, ndryshimi i parë çon në rezultatetë ndryshme. Për t'i bërë rezultatet të krahasueshme me ato të Brock dhe Hommes (1997) ndiqet kjo linjë: Vendimmarrjet për ofertën bëhen duke zgjedhur prodhimin, i cili maksimizon fitimet e pritshme që varen nga operatori lag i prodhimit për një periudhë, $\max_q (p^e_{t+1}\, q - c(q))$ ku $c(q)$ është kostoja e funksionit, që rritet në q. Pritshmëritë e çmimit p^e_{t+1}formohen duke zgjedhur një parashikues nga bashkësia e funksionit të pritshmërive. Duke patur parasysh se ka heterogjenitet në formimin e pritshmërive, oferta e tregut është shuma e

vedimmarrjes së ofertës së agjentëve heterogjenë. Në model çdo agjent zgjedh midis dy parashikuesve $H_j \epsilon\{H_1, H_2\}$ ku çdo parashikues varet nga një vektor i çmimit të kaluar

$$\vec{P}_t = (p_t, p_{t-1}, p_{t-2}, \dots, p_0). \tag{2.108}$$

Raportet e agjentëve që zgjedhin një nga dy parashikuesit $n_{j,t}(p_t, H(\vec{P}_{t-1})$,varen nga çmimi i tanishëm dhe nga vektorët e parashikuesve të kaluar:

$$H(\vec{P}_{t-1}) = (H_1(\vec{P}_{t-1}), H_2(\vec{P}_{t-1})) \tag{2.109}$$

Ekuilibri i tregut jepet nga ekuacioni:

$$D(p_{t+1}) = \sum_{j=1}^{2} n_{j,t}\,(p_t, H(\vec{P}_{t-1}))S(H_j(\vec{P}_t)) \tag{2.110}$$

ku $D(.)$ është funksioni i kërkesës dhe $S(.)$ është funksioni i ofertës. Për ta thjeshtëzuar modelin, supozohet se kërkesa dhe oferta janë lineare. Atëherë:

$$D(p_t) = F - Bp_t \tag{2.111}$$

$$S(H_j(\vec{P}_t) = b(H_j(\vec{P}_t)\ me\ F, B, b\epsilon R \tag{2.112}$$

Pa humbje të përgjithësimit për cilësitë e qëndrueshmërisë, F merret e barabartë me 0. Ekuilibri i tregut përcaktohet nga kushtet.

$$D(p_{t+1}) = n_{1,t}S(H_1(\vec{P}_t)) + n_{2,t}S(H_2(\vec{P}_t)) \tag{2.113}$$

dhe dy funksionet e parashikueve përcaktohen nga ekuacionet:

$$H_1(\vec{P}_t) = p_{t+1} \text{ me kosto } C > 0 \tag{2.114}$$

$$H_2(\vec{P}_t) = \theta p_t + (1-\theta)p_{t-1} \text{ me } 0 < \theta < 1 \text{ dhe pa kosto.} \tag{2.115}$$

Në çdo periudhë, pasi vëzhgohet çmimi i ri dhe vlerësohet saktësia e parashikimit, prodhuesit përshtasin parashikimet e tyre për periudhën e ardhshme. Evolimi i proporcionit të agjenteve që përdorin një lloj të caktuar parashikuesi jepet nga:

$$n_{j,t+1} = \exp(\beta U_{j,t+1}) / \sum_{j=1}^{2} \exp(\beta U_{j,t+1}) \tag{2.116}$$

$U_{j,t+1}$ është një matës i dobisë së lidhur me një parashikues të caktuar. Variabli β tregon parametrizimin e preferencave mbi fitimin. Sa më e madhe të jetë β aq më shumë mundësi ka që prodhuesi të kalojë në pritshmëri me përfitime më të larta. Supozohet se shkalla e përfitimit është e barabartë me fitimin neto të periudhës së kaluar. Atëherë ,

$$U_{j,t+1} = \pi_j\,(p_{t+1}\,H(\vec{P}_t)) \tag{2.117}$$

ku,

$$\pi_j\,(p_{t+1}\,H(\vec{P}_t)) \;=(p_{t+1}, S(H_j(\vec{P}_t)) - c(S(H_j(\vec{P}_t))) - C_j \tag{2.118}$$

dhe C_j është kostoja fikse e lidhur meH_j. Kostoja e prodhimit jepet me funksionin kuadratik të kostos $c(q) = \frac{q^2}{2b}$. Funksionet përkatëse të fitmit për prodhuesit që përdorin secilin parashikues janë:

$$\pi_1(p_{t+1}, p_{t-1}) = \tfrac{b}{2}p_{t+1}^2 - C \tag{2.119}$$

$$\pi_2(p_{t+1}, p_t, p_{t-1}) = \tfrac{b}{2}(\theta p_t + (1-\theta)p_{t-1}) + (2p_t - (\theta p_t + (1-\theta)p_{t-1})) \tag{2.120}$$

Përftohet ligji i ri i ndryshimit për dy parashikuesit.

$$n_{1,t+1}=exp\,(\beta(\tfrac{b}{2}p_{t+1}^2 - C))/Z_{t+1} \tag{2.121}$$

$$n_{2,t+1}=exp\,(\beta\tfrac{b}{2}(\theta p_t + (1-\theta)p_{t-1}))(\,2p_{t+1} - (n_{1,t}))/Z_{t+1} \tag{2.122}$$

$$Z_{t+1} = \textstyle\sum_{j=1}^{2} \exp(\beta\pi_{j,t+1}) \tag{2.123}$$

$$n_{1,t+1} + n_{2,t+1} = 1. \tag{2.124}$$

Modeli cobweb me pritshmëri racionale dhe adaptive është një sistem ekuacionesh jolineare me diferenca që paraqet ndryshimin e çmimeve (2.125) dhe atë të raportit të agjentëve që përdorin parashikuesit racional të pritshmërive (2.126):

$$p_{t+1} = \phi(p_t, p_{t-1}, n_{1,t}) \tag{2.125}$$

$$n_{1,t+1} = \varphi(p_t, p_{t-1}, n_{1,t}) \tag{2.126}$$

ku,

$$\phi(p_t, p_{t-1}, n_{1,t}) = A(n_{1,t})((\theta p_t + (1-\theta)p_{t-1}) \quad (2.127)$$

$$A(n_{1,t}) = b(n_{1,t} - 1)(B + bn_{1,t}) \quad (2.128)$$

$$\varphi(p_t, p_{t-1}, n_{1,t}) = \frac{1}{1+\exp(-\frac{\beta}{2}b((\theta p_t+(1-\theta)p_{t-1})^2((A(n_{1,t})-1)^2)-2C))} \quad (2.129)$$

Meqë (2.125) dhe (2.126) janë respektivisht ekuacione të rendit të dytë me diferenca dhe të rendit të parë, sistemi mund të rishkruhet si një sistem me tre ekuacioneme diferenca të rendit të parë

$$\begin{aligned} h_{t+1} &= p_t \\ p_{t+1} &= \phi(p_t, p_{t-1}, n_{1,t}) \\ n_{1,t+1} &= \varphi(p_t, p_{t-1}, n_{1,t}) \end{aligned} \quad (2.130)$$

Qëndrueshmëria ose joqëndrueshmëria e gjendjes së qëndrueshme të sistemit (2.130) mund të verifikohet duke parë Jacobian-in e (2.130) të marrë për gjendjen e qëndrueshme.

Qëndrueshmëria dhe ciklet:

Sistemi (2.125 dhe 2.126) ka vetëm një pikë ekuilibri.Lassell (2004,2005).

$$E = (0,0,\overline{n}_1(\beta)) = 1/(1 + \exp(\beta C)) \quad (2.131)$$

Për thjeshtësi merret *C = 0* ose *C = 1*. Kur *C = 0* agjentët mund të përdorin parashikuesin e sofistikuar dhe $\partial A(\overline{n}_1(\beta))/\partial\beta < 0$.

Propozimi 1

Supozojmë se koeficentët këndore të kërkesës dhe ofertës plotësojnë kushtin $\frac{b}{B} > 1$.*Kur nuk ka informacione kostosh, pika e e kuilibrit* $E = (0,0,\overline{n}_1(\beta)) = 1/2$ *dhe është gjithmonë asimptotikisht lokalisht e qëndrueshme.*

Propozimi 2 *(Qëndrueshmëria lokale dhe pika e ekuilibrit)*

Le të jetë $\frac{b}{B} > 1$*dhe C = 1. Ekziston* $E = (0,0,\overline{n}_1(\beta))$ *ku* $\overline{n}_1(\beta) = 1/(1 + exp(\beta)$ *më cilësitë e mëposhtme:* $\exists\ \beta_1$ *e tillë që për të gjitha* $0 \le \beta < \beta_1$ *dhe për çdo* $2/3 < \theta < 1, E$ *është lokalisht asimptotikisht e qëndrueshme.*

Për të gjitha $\beta > \beta_1$dhe për çdo $2/3 < \theta < 1, E$ është lokalisht jo e qëndrueshme $\exists\ \beta_2$ e tillë që për të gjitha $0 \le \beta < \beta_2$ dhe për çdo $\theta\epsilon\left(o.\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ E është lokalisht asimptotikisht e qëndrueshme.

Për vlerat $\beta > \beta_2$dhe për çdo $\theta\epsilon\left(o.\frac{1}{2}\right) \cup (\frac{1}{2}, 3/2)$ është lokalisht jo e qëndrueshme.

Propozimi 3 *(Bifurkacionet dhe Pika e Ekuilibrit)*

Nëse $\frac{b}{B} > 1$ dhe C = 1. Fiksojmë $2/3 < \theta < 1$ kur $\beta = \beta_1$ sistemi shfaq bifurkacion. Fiksojmë $\theta\epsilon\left(o.\frac{1}{2}\right) \cup (\frac{1}{2}, 3/2)$ kur $\beta = \beta_2$ sistemi shfaq bifurkacion.

Kur $\theta = 1/2$, sistemi është në rezonancë të fortë 1:3.

Kur $\theta = 3/2$, sistemi shfaq bifurkacion Lassell (2005), Hommes (2011).

Analiza dinamike varet nga një bashkësi parametrash të θ, intensitetit të zgjedhjes β, koeficentëve këndor të kërkesës dhe ofertës B dhe b. Për kombinime specifike të këtyre parametrave, pika e ekuilibrit mund të humbasë qëndrueshmërinë duke çuar në ekuilibër periodik, që do të thotë se sistemi shfaq një bifurkacion primar dhe mund të shfaqen qëndrueshmëri të fluckacioneve të çmimeve. Ekziston një lidhje komplekse midis parametrit të përshtatshmërisë dhe intensitetit të zgjedhjeve në modelin cobweb me pritshmëri racionale dhe adaptive. Në realitet, përtej disa vlerave kritike të intensitetit të zgjedhjes, ndërsa vendoset një peshë më e madhe mbi informacionin e tanishëm, i mëparshmi mund të ulet dhe pika e ekuilibrit do të jetë lokalisht jo e qëndrueshme. Me fjalë të tjera, shpejtësia e lëvizjes nga një parashikues te një tjetër balancohet nga parametri i përshtatshmërisë. Nga ana tjetër, për vlera specifike të intensitetit të zgjedhjes, pavarësisht peshës që ka informcioni i mëparshëm në parashikim, mund të shfaqen cikle të qëndrueshme në çmime Chiarella (1988), Goeree (2000), Puu, T. (2000), Lassell (2004,2005), Hommes (2007,2013).

Zëvendësimi i pritshmërive naive me ato adaptive në modelin cobweb me pritshmëri racionale mund të krijojë vetëm një mjedis më të qëndrueshëm dhe të përshtatshëm për cikle të qëndrueshme.

KAPITULLI 3 Zbatime të modelit cobweb

3.1 Një eksperiment mbi bazën e modelit cobweb me pritshmëri racionale

Për shumë dekada në mes ekonomistësh ka pasur debate të forta në lidhje me rëndësinë dhe ndikimin e pritshmërive në sistemet ekonomike.Kriza e sotme ekonomike duket sikur i ka zbehur pak këto debate dhe ka risjellë në vëmendje marrëdhëniet midis matematikës dhe ekonomisë. Analizat ekonomike të bazuara në supozime të karakterit matematik, nuk ishin të mjaftueshme për të shmangur humbjen pasi në ekonomi pritshmëritë individuale shihen shpesh si një faktor që çojnë në paqëndrueshmëri të tregut.Kjo për faktin se në një ekonomi të përcaktuar në mënyrë racionale mendimi personal dhe psikiologjia e tregut shfaqin heterogjenitet.

Përmirësimi i modeleve matematikore është një përpjekje për të përshkruar matematikisht pritshmëritë e agjentëve ekonomikë. Modeli cobweb analizohet duke studiuar pritshmëritë e agjentëve ekonomikë nëpërmjet eksperimenteve laboratorike. Në këtë paragraf do të trajtohen disa rezultate teorike në lidhje me pritshmëritë dhe agjentët ekonomikë, si dhe këto rezultate teorike do të ilustrohen me anë të eksperimentit.

3.1.1 Pritshmëritë heterogjene

> *"Një nga gjërat që makroekonomia na mëson është se individët nuk janë njësoj. Ka heterogjenitet dhe heterogjeniteti më i rëndësishëm është ai i pritshmërive. Nëse nuk do kishim heterogjenitet, nuk do kishte tregti, por zhvillimi i një modeli analitik me agjentë heterogjenëështë i vështirë"* (Ken Arrow).

Në ekonomiks dhe financë po vihet re një ndryshim i rëndësishëm paradigme, nga një model me agjentë racionale, drejt një modeli nëtë cilin tregjet janëtë populluara me agjentë heterogjenë, me racionalitet të kufizuar. Përqasja e re me agjentë heterogjenë, sfidon strukturat tradicionale të analizës së modeleve me agjentë racionale. Gjithsesi, është për t'u vënë në dukje fakti se shumë ide në modelin me agjentë heterogjenë datojnë shumë kohë para hipotezave të tregjeve me pritshmëri racionale dhe eficente.

Disa nga elementet kyçe të modelit me agjentë heterogjenë lidhen ngushtë me pikëpamjen e Keynes që "*pritshmeritë kanë rëndësi*". Keynes argumentoi se mendimet personale të investitorëve dhe psikologjia e tregut luajnë një rol kryesor në tregjet financiare, siç jepet qartë në citimin: "*Investimet e bazuara në pritshmëri afatgjata janë shumë jopraktike. Kushdo që i tenton me siguri duhet të punojë më shumë dhe të ketë risqe më të mëdha se ai, i cili përpiqet të marrë me mend më mirë se tregu; se si tregu do të sillet dhe duke supozuar inteligjencë të njëjtë, ai mund të bëjë më shumë gabime shkatërruese*" Keynes (1936). Sipas Keynes, është e vështirë

të llogaritësh një matje objektive të "bazave të tregut" dhe, nëse është e mundshme, është e kushtueshme për të mbledhur tërë informacionin e nevojshëm.

Herbert Simon (1957) theksoi se individët janë të kufizuar në njohuritë e tyre për mjedisin dhe në aftësitë e tyre për të llogaritur variablat e tregut dhe për më tepër ata hasen me kosto për të marrë informacion të sofistikuar me qëllim që të ndërrmarrin vendime optimale. Simon argumentoi se, për shkak të këtyre kufizimeve, modeli i agjenteve ekonomikë me *racionalitet të kufizuar* që përdorin rregulla të thjeshta, por të kënaqshme për vendimet e tyre kur janënën pasiguri, është një përshkrim më realist dhe i saktë i përshkrimit të sjelljes njerëzore në krahasim me modelin me *agjente racionale* me rregulla optimale të vendimmarrjes. Kjo pikëpamje u mbështet në vitet '70 nga eksperimentet psikologjike të Kahneman dhe Tversky (1973) dhe Tversky dhe Kahneman (1974), të cilat treguan se njerëzit nuk veprojnë në mënyrë racionale kur ndërrmarrin vendime në probleme të thjeshta ku ka pasiguri. Për diskutime të kohëve të fundit në mbështetje të racionalitetit të kufizuar mund t'u referohemi Simon (1979) dhe Kahneman (2003).

Milton Friedman ka qenë një ndër mbështetësit kryesorë të përqasjes me agjente racionalë, duke pretenduar se sjellja e konsumatorëve, firmave dhe investitorëve mund të përshkruhet si racionale. Hipoteza e Friedman thotë se agjentët joracionalë nuk do ti mbijetojnë konkurencës evolucionare të tregut dhe si rrjedhojë do të nxirren nga tregu i lirë. Njerëzit të cilët argumentojnë se spekulimi është në përgjithësi destabilizues rrallë herë kuptojnë se kjo është njësoj si të thuash se spekulatorët humbin para, për shkak se spekulimi është destabilizues vetëm nëse spekulatorët mesatarisht shesin atëherë kur monedha ka vlerë të ulët në çmim dhe blejnë atëherë kur ajo ka vlerë të lartë Friedman (1953). Në një mënyrë të ngjashme, Arifovic, J. (1994), Alchian (1950) argumentoi se evolucioni gjenetik dhe selektimi natyral i udhëhequr nga çmimet mund të eleminojnë kompanitë joracionale dhe të çojnë në një treg ku dominojnë firmat racionale që arrijnë fitime maksimale.

Sjellja racionale ka dy aspekte të ngjashme, por të ndryshme Sargent (1993). Së pari, një rregull vendimmarrjeje racionale ka disa tiparë makro-ekonomike dhe rrjedh nga principet e optimizimit, siç janë leverdia e pritshme ose fitim i pritshëm maksimal. Së dyti, agjentët kanë *pritshmëri racionale* për ngjarjet në të ardhmen, që do të thotë se besimet janë konsistente me çmimet reale dhe agjenti racional nuk bën gabime sistematike të parashikimeve. Në një ekuilibër të pritshmërive racionale, parashikimet e variablave të ardhshme përputhen me pritshmëritë e kushteve matematikore, duke ditur të gjithë informacionin e nevojshëm. Që në prezantimin nga Muth, (1961) dhe më pas popullarizimit nga Lucas (1971), në vitet '70 dhe '80 hipoteza e pritshmërive racionale dhe hipoteza e tregjeve efiçente është bërë paradigma dominante për sa i përket formimit të pritshmërive në ekonomiks dhe financë.

Sidoqoftë në vitet '80 dhe '90 modeli me pritshmëri heterogjene dhe racionalitet të kufizuar morën përkrahje të gjerë.

Në një situatë kur të gjithë agjentët janë racionalë dhe dihet se të gjithë agjentët janë racionalë nuk do të kishte tregti. Një tregtar me informacion superior privat nuk mund të përfitojë nga ky informacion pasi tregtarët e tjerë racionalë do prisnin që ai të ketë informacion pozitiv për asetin dhe për pasojë nuk do t'ia shisnin asetin.

3.1.2 Hipoteza

Puna teorike e kohëve të fundit po e bën shumë të qartë shumëllojshmërinë e ekuilibrave që mund të hasen në një gamë të gjerë situatash që përfshijnë tregti të vazhdueshme, në lojra konkuruese dhe me agjentë të fundëm. Veçse pak prej tyre janë jo interesante. Ato nuk përshkruajnë sjellje reale që njerëzit do të bënin nëse silleshin në mënyrë adaptive. "*Mendoj se një teoremë e përshtatshme qëndrueshmërie do të qe e dobishme për t'i përjashtuar ato. Por për të qenë të dobishme, teoremat e qëndrueshmërisë duhet të jenë më tepër se sa një mënyrë e thjeshtë e të thënit se nuk duhet menduar për ekuilibra të caktuar"*. Lucas preferon ta shohë atë *si një hipotezë që mund të testohet eksperimentalisht*, si një rast të veçantë të ligjeve të përshtatshmërisë që ne besojmë se drejtojnë Lucas (1986).

Teori të ndryshme për formimin e pritshmërive nxjerrin rezultate kontradiktore për sa i përket qëndrueshmërisë ose joqëndrueshmërisë së gjendjes së qëndrueshme të ekuilibrit me pritshmëri racionale në modelin Cobweb Hommes et al. (2007). Për shembull, studime të bëra nga Bray dhe Savin (1986) tregojnë se nëse agjentet mësojnë nëpërmjet metodës së katrorëve më të vegjël, çmimi konvergjon në çmimin e ekuilibrit me pritshmëri racionale. Gjithashtu, Arifovic (1994) tregon se çmimet konvergjojnë duke përdorur mësimin nëpërmjet algoritmave gjenetike. Të njëjtin përfundim hasin edhe te Hommes dhe Sorger (1998) kur metoda e mësimit bëhet nëpërmjet mesatares së çmimeve të viteve të kaluara. Nga ana tjetër, shumë studimeetëetjera nxjerrin përfundimin se sistemi nuk konvergjon në pikën e ekuilibrit të pritshmërive racionale. Studime si Brock dhe Hommes (1997) dhe Guesnerie (2002) konfirmojnë këto rezultate.

Prandaj lind nevoja e eksperimentimeve për tëtestuar teoritë e ndryshme mbi konvergjencën e çmimeve në sistemet Cobweb. Lucas që në 1986 e theksoi rëndësinë e ndërtimit të eksperimenteve njerëzore për të përshkruar sjelljet njerëzore dhe për të ndërtuar një teoremë të pranueshme. Në këtë paraqgraf do të paraqitet një eksperiment për të testuar hipotezat e pritshmërive në një prej modeleve dinamike Cobweb. Eksperimente të ngjashme janë ndërtuar gjithmonë e më shumë vitet e fundit me zhvillimin e kompjuterave. Holt dhe Villamil (1986) dhe Hommes et al. (2000) ndërtuan eksperimente për modelin cobweb ku luhatjet e çmimeve vijnë si pasojë e zgjedhjeve të një individi të vetëm. Wellford (1989) ralizoi disa eksperimente komjuterike cobweb ku çmimet e tregut përcaktohen nga vendimet e subjekteve për sasinë që do të prodhohet.

Ky eksperiment do të mbështetet në eksperimentet e Hommes et al. (2007) dhe Hommes (2011) ku subjektet parashikojnë çmimin për vitin e ardhshëm. Disa nga pyetjet që do ngrihen janë:

1. *A munden subjektet tëmësojnëme kalimin e kohës dhe të shkojnë drejt çmimit të ekuilibrit me pritshmëri racionale, apo çmimet në treg do të luhaten nëmënyrëtë dukshme sipër ose poshtëçmimit të ekuilibrit?*
2. *A do të ketë koordinim, edhe nëse ka informacion tëkufizuar, apo do të ketë heterogjenitet?*

3. *A është një përshkrim i saktë i çmimeve të tregut të përftuara gjatë eksperimentit hipoteza e pritshmërive racionale?*

3.1.3 Modelimi i eksperimentit

Modeli cobweb përshkruan luhatjet e çmimeve në një treg, i cili duhet të marrë vendimet e prodhimit një periudhë më parë se kur ndodh shitja. Në eksperimentin tonë subjektet duhet të parashikojnëçmimin e periudhës tjetër për një produkt të caktuar. Subjektet kanë informacion të limituar për tregun dhe u është thënë se janë këshilltarë për prodhuesit e një produkti jospecifik dhe çmimi vendoset nga spastrimi i tregut, pra barazia e kërkesës dhe ofertës. Gjithashtu subjektet informohen se ka pasiguri përsa i përket ofertës dhe kërkesës së produktit për shkak të pasigurive të tregut, pra shoku i ofertës dhe i kërkesës shkaqet e së cilës i shpjeguam më sipër. Subjektet gjithashtu nuk i dinë ekuacionet e ekuilibrit të tregut dhe as nuk janë informuar me shkaqet e jashtmetë ofertës dhe kërkesës. Subjekteve me pas u kërkohet të parashikojnë çmimet e tregut për 50 periudha të vazhdueshme. Parashikimi duhet të jetë gjithmonë ndërmjet 0 dhe 10 dhe çmimi është gjithmonë ndërmjet 0 dhe 10 i përcaktuar në modelin matematikor.

Pas çdo periudhe, subjektet informohen për çmimin përfundimtar të periudhës në eksperiment. Çdo sesion zgjat për 50 periudha. Në çdo periudhë, çmimi agregat i tregut varet nga parashikimet individuale të 6 subjekteve. Një shok i rastësishem tregu i shtohet ekuacionit të ekuilibrit në çdo periudhë. Subjekteve nuk u jepet informacion rreth indentitetit të pjestarëve të tjerë të grupit, madhësisë së grupit, ose rreth ekuacioneve të ekuilibrit të tregut. Gjithashtu atyre nuk u bëhet e ditur se çmimi i tregut varet nga parashikimi i tyre dhe pjestarëve të tjerë dhe ndalohet komunikimi ndërmjet njëri-tjetrit. Pra, subjektet kanë shumë pak informacion rreth procesit tëvendosjes së çmimit në treg. Informacioni në këtë eksperiment është i ngjashëm me informacionin që do të jepej në një skenar me pritshmëri racionale të kufizuar.

Çmimi i tregut p_t në këtë eksperiment përcaktohet nga ekuacioni i ekuilibrit të tregut cobweb në të cilin kërkesa barazohet me ofertën,

$$D_{(p_t)} = \sum_{i=1}^{K} S(p_{i,t}^{e}) \tag{3.1}$$

Ku $D_{(p_t)}$ është kërkesa për produktin për çmimin p_t, K është madhësia e grupit, $S(p_{i,t}^{e})$ përcakton kurbën e ofertes, dhe $p_{i,t}^{e}$ është parashikimi i çmimit në periudhën *t,* i bërë në periudhën *t*-1 nga subjekti *i*. Në eksperiment numri i subjekteve në treg është i fiksuar për K=6. Duke zgjidhur (3.1) për çmimin e ekuilibrit përftojmë

$$p_t = D^{-1} \sum_{i=1}^{K} S\left(p_{i,t}^{e}\right) \tag{3.2}$$

Në eksperiment kurba e kërkesës është e fiksuar dhe lineare

$$D_{(p_t)} = a - bp_t + \eta_t, \qquad a, b > 0 \qquad (3.3)$$

ku η_t është një shok i vogël kërkese dhe jepet në mënyrë rastësore nga një shpërndarje normale në periudhën *t*. Për të gjitha rastet parametrat janë të fiksur ku $a = 13$ dhe $b = 1.5$. Për kurbën e ofertës përdoret ekuacioni jolinear

$$S\left(p_{i,t}^e\right) = \tanh\left(\lambda\left(p_{i,t}^e - 6\right)\right) + 1, \qquad (3.4)$$

Oferta është jolineare, por rritet me rritjen e pritshmërisë së prodhuesve dhe ulët me uljen e pritshmerisë së prodhuesve. Parametri λ përcakton jolinearitetin e kurbës së ofertës dhe si rrjedhim stabilitetin e modelit cobweb në treg. Eksperimente të ndryshme do të bëhen për vlera të ndryshme të λ për të parë sjelljen e subjekteve në situata të ndryshme të qëndrueshmërisë në treg. Duke konsideruar kurbën e ofertës dhe atë të kërkesës çmimi i tregut përcaktohet nga

$$p_t = \frac{a - \sum_{i=1}^{K} S(p_{i,t}^e)}{b} + \epsilon_t \qquad (3.5)$$

Ku $\epsilon_t = \frac{\eta_t}{b}$ është një term i vogël proporcional me shokun e kërkesës η_t dhe mund të interpretohet si një pasiguri rreth gjendjes ekonomike. Vlerat ϵ_t përcaktohen në mënyrë rastësore nga shpërndarja normale me variancë $\sigma_\epsilon^2 = 0.25$.
Në varësi të parametrit λ u përpiluan tri raste të ndryshme, i qëndrueshëm , jo i qëndrueshëm dhe tërësisht jo i qëndrueshëm. Parametri λ shërben si rregullator i jolinearitetit të kurbës së ofertës. Tabela e mëposhtme përmbledh tri rastet e sipërpërmenduara. Mund të vëmë re se çmimi i pritshëm racional nga këto raste varion disi në varësi të koeficientit λ.

Tabela 3.1 Dizenjimi i eksperimenteve për tri raste të ndryshme

Rastet	I qëndrueshëm	I paqëndrueshëm	Paqëndrueshmëri e theksuar
Parametri λ	0.21	0.55	2.2
Çmimi i ekuilibrit të modelit PR, P*	5.27	5.58	5.86
Numri i pjesëmarrësve	24	24	24

Burimi: Përpunime të autorit

3.1.4 Disa rezultate e përfundime

Rezultatet e pjesshme të eksperimentit janë marrë gjatë kryerjes së tij me katër grupe pjesëmarrësish me gjashtë persona. Grafikët e plotë dhe kontrrolli i hipotezave është paraqitur në aneksin D të Shtojcës. Pjestarët e tre grupeve të para janë studentë që ndjekin studimet Bachelor

dhe grupi i katërt janë studentë të ciklit Master. Modeli matematikor me koeficientët e përcaktuar më sipër me λ=0.21 që i përgjigjet rastit të qëndrueshmërisë jep çmimin e ekuilibrit 5.27 me të cilin krahasohen ato eksperimentale.Eksperimenti kryhet sipas kushteve të përshkruara dhe më poshtë.Do të jepen çmimet për çdo periudhë për katër grupe subjektesh me nga gjashtë subjekte.

Qëllimi i këtij eksperimenti është që të investigojmë nëse hipoteza e Pritshmërive Racionale (PR) është një përshkrim i saktë i çmimeve të tregut të përftuara gjatë eksperimentit tonë. Kredibiliteti i PR do të investigohet duke u fokusuar në tri karakteristika të rëndësishme; do shihet në radhë të parë nëse çmimet e tregut kanë shmangie,nëse luhatja e çmimeve shfaq volatilitet të tepërt, dhe nëse çmimet janë të parashikueshme. Eshtë natyrale që ti matim këto karakteristika me anë të mesatares, variancës, dhe autokorrelacionit të shfaqur në çmimet e tregut që përftohen gjatë eksperimentit dhe ti krahasojmë me karakteristikat koresponduese të PR. Në Figurën 3.1 jepen grafikët e çmimeve për rastin teorik të Pritshmërive racionale si the grafiku i funksioneve të autokorrelacionit që do të përdoren si etalon krahasimi me rastet e eksperimentale që do të paraqiten më poshtë.

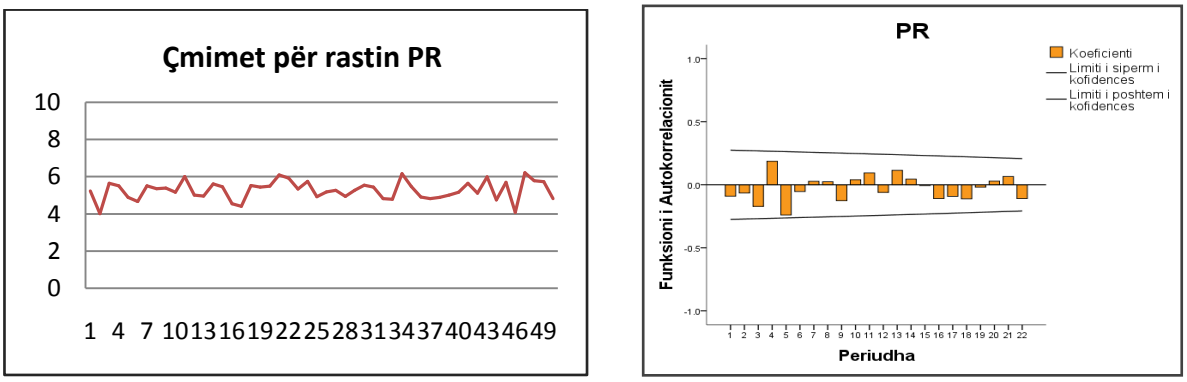


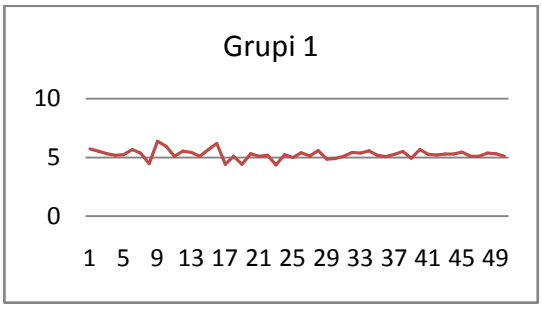
Figura 3.1 Grafiku i çmimit dhe autokorrelacioneve për PR
Burimi: Përpunime të autorit

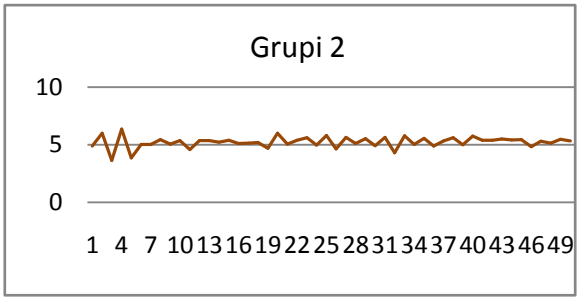
3.1.5 Dinamika e çmimeve

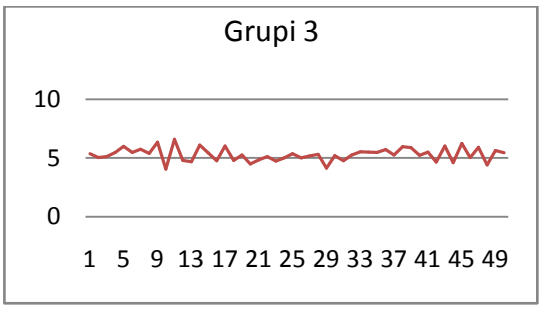
Të gjitha eksperimentet për të tri rastet e qëndrueshmërisë të përcakuara jepen më poshtë në Figuren 3.2. Në pamje të parë, në të gjitha tregjet, çmimet japin përshtypjen e luhatjeve të parregullta pa një strukture të caktuar. Duket qartë se madhësia e luhatjeve është më e madhe për rastet jo të qëndrueshme në krahasim me tregun e qëndrueshëm. Rastet e qëndrueshme japin përshtypjen e luhatjeve të PR. Rastet jo të qëndrueshme paraqesin një luhatje disi më të madhe, por mund të vërehet se me kalimin e kohës luhatjet zvogëlohen disi duke sugjeruar një lloj strukture të mësuari te agjentët. Në rastet me joqëndrueshmëri të theksuar është e vështirë të vërehet një strukturë e caktuar në sjelljen e agjentëve. Vetëm në Grupin e parë dhe disi në Grupin e katërt mund të vërehet se luhatjet e çmimeve pakësohen disi me kalimin e kohës duke sugjeruar një strukturë të mësuari dhe një tendencë për të konvergjuar te PR.

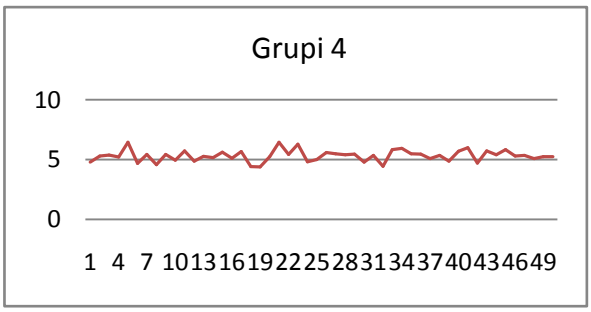
Për të testuar nëse eksperimentet i përshtaten hipotezës se PR, në Tabelën 3.2 jepen mesatarja dhe varianca e çmimeve për të tria rastet përgjatë 50 periudhave si dhe për 25 periudhat e para dhe më pas 25 periudhat e dyta. Për të gjitha rastet vërehet një përqasje e konsiderueshme e mesatares së çmimit në krahasim me rastin teorik të pritshmërive racionale, përkatësisht 5.27, 5.58 dhe 5.86. Përgjatë 50 periudhave të plota, varianca për rastin me paqëndrueshmëri të theksuar varion nga 1.53 der ne 4.42, e cila është shumë më e lartë nga varianca 0.25 që haset në modelin me Pritshmëri Racionale. Në rastin e paqëndrueshëm varianca luhatet nga 0.44 deri në 0.83, e cila është gjithashtu më e lartë se modeli PR. Për sa i përket rastit të qëndrueshëm variance ka një përqasje të madhe me modelin PR dhe luhatet midis 0.15 dhe 0.31. Për 25 periudhat e fundit varianca luhatet midis 0.05 dhe 0.27 që është shumë e përafërt me modelin PR. Përkundrazi, modeli jo i qëndrueshëm dhe ai me paqëndrueshmëri të theksuar shfaqin variancë në intervalet 0.26-0.72 dhe 0.59-3.02 që është shumë më e lartë se varianca e modelit me PR.

Rasti i qëndrueshëm

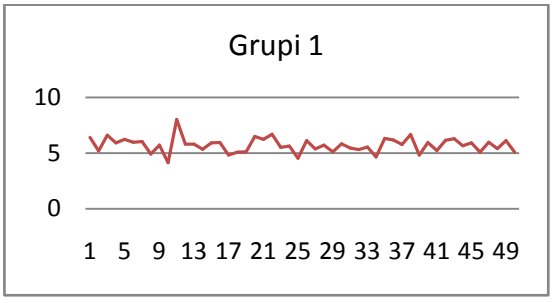


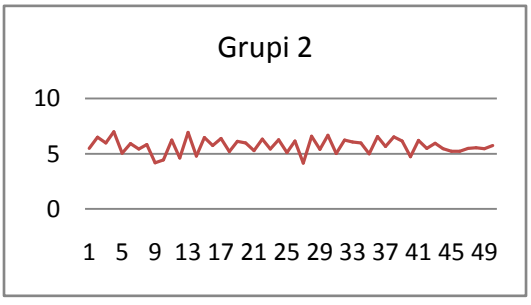


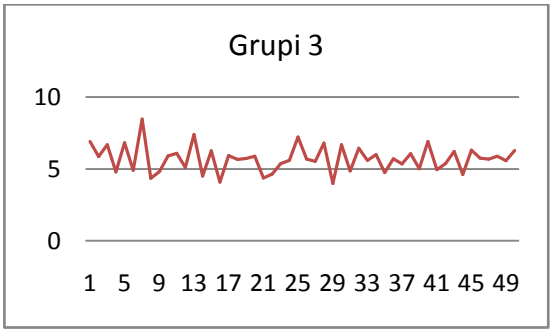


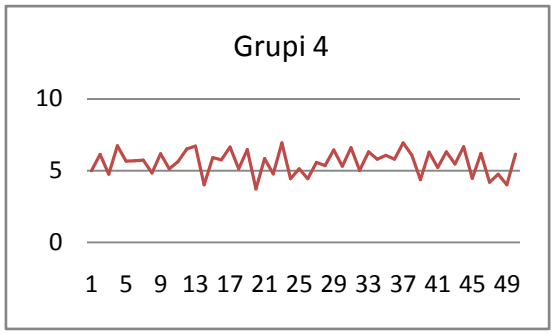


Rasti jo i qëndrueshëm

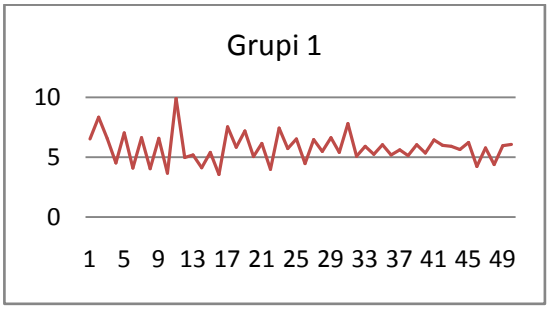


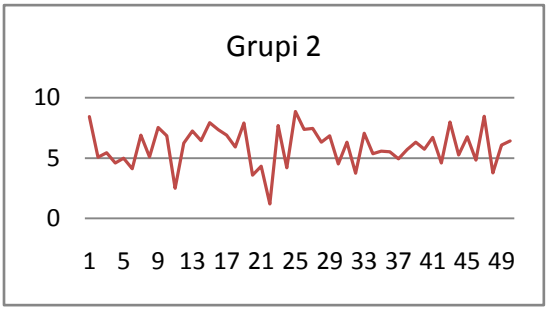


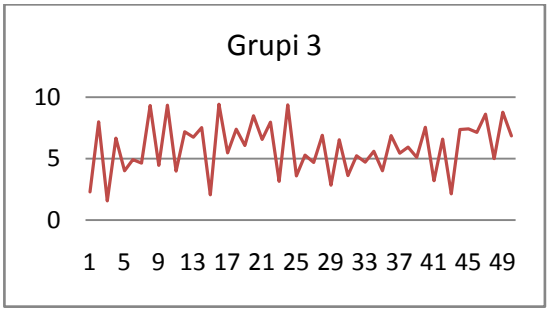




Rasti me paqëndrueshmëri të theksuar







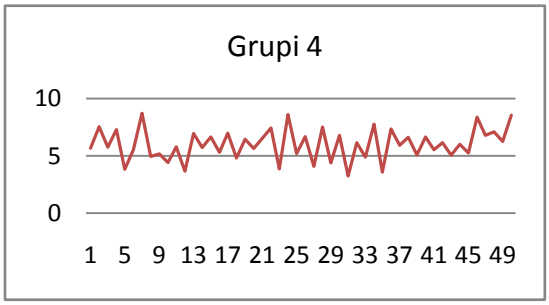


Figura 3.2 Grafikët e çmimeve
Burimi: Përpunim i autorit

Mesataret dhe variancat e çmimeve të tregut për 25 periudhat e para, 25 periudhat e dyta dhe për 50 periudhat e plota rastin e qëndrueshëm, të paqëndrueshëm dhe atë me paqëndrueshmëri të theksuar.

Për të krahasuar mesataren dhe variancën nga eksperimentet e përftuara ne krahasojmë mesataret dhe variancat e grupeve me rastin me pritshmëri racionale. Për mesataret testi që është zhvilluar është ***t-statistic*** i njëanshëm që krahason mesataret përkatëse të tre rasteve, të qëndrueshme, të paqëndrueshme dhe me paqëndrueshmëri të theksuar me Pritshmëri Racionale, me mesataret që përftohen nga të gjitha grupet e eksperimentit. Dy hipotezat e parashtruara janë:

$$H_0: Mesataret\ jane\ te\ barabarta$$
$$H_1: Mesataret\ jane\ te\ ndryshme$$

Tabela 3.2 Karakteristikat statistike për periudha të ndryshme

	Periudhat 1-25		Peruidhat 26-50		Periudhat 1-50	
	Mesatarja	Varianca	Mesatarja	Varianca	Mesatarja	Varianca
*Rasti i qëndrueshëm λ=0.*21						
PR	5.27	0.25	5.27	0.25	5.27	0.25
Grupi 1	5.18	0.35	5.28	0.13	5.23	0.24
Grupi 2	5.27	0.26	5.25	0.05	5.26	0.15
Grupi 3	5.28	0.37	5.31	0.27	5.3	0.31
Grupi 4	5.26	0.31	5.35	0.15	5.3	0.22
Rasti i paqëndrueshëm λ=0.55						
PR	5.58	0.25	5.58	0.25	5.58	0.25
Grupi 1	5.75	0.64	5.66	0.26	5.71	0.44
Grupi 2	5.70	1.19	5.70	0.39	5.70	0.47
Grupi 3	5.73	1.19	5.67	0.52	5.7	0.84
Grupi 4	5.59	0.76	5.60	0.72	5.59	0.73
Rasti me paqëndrueshmëri të theksuar λ=2.2						
PR	5.86	0.25	5.86	0.25	5.86	0.25
Grupi 1	5.86	2.52	5.7	0.59	5.78	1.53
Grupi 2	5.89	3.68	5.98	1.49	5.93	1.53
Grupi 3	6.00	5.96	5.73	3.02	5.86	4.42
Grupi 4	5.93	1.86	6.03	1.98	6.00	1.85

Burimi: Përpunime të autorit

Në Tabelën 3.3 krahas ***t-statistic*** jepen edhe ***p-*** vlerat që tregojnë intervalin kur hipoteza H_0 mund të rrëzohet. Nëse ***p-***vlera është më e vogël se 0.05 hipoteza fillestare mund të rrëzohet dhe konkludohet se mesataret e grupeve të eksperimentit ndryshojnë nga mesataret e rastit me Pritshmëri Racionale. Mund të shihet se për të gjitha rastet hipoteza fillestare nuk mund të rrëzohet dhe mund të konkludohet se mesataret e çmimeve të përftuara në eksperiment janë të njëjta me mesataret e çmimeve në rastin e Pritshmërive racionale.

Për të testuar hipotezat për variancën u realizua test statistikor për homogjenitetin e variancave ndërmjet të gjitha grupeve dhe rasteve teorike me Pritshmëri Racionale. Në rastet me Pritshmëri Racionale varianca është gjithmonë 0.25 për shkak të termit të shokut të ofertës që u prezantua fillimisht te konstruktimi teorik i modelit. Specifikisht në këtë punim u zhvillua testi *levene* dhe vlerat e *levene-statistic* (l-stat) jepen në tabelën e mëposhtme. Hipotezat në mënyrë të ngjashme me testin për mesataren janë:

$$H_0: Varianca\ eshte\ e\ njejte\ me\ variancen\ PR$$
$$H_1: Varianca\ eshte\ e\ ndryshme\ nga\ varianca\ PR$$

Hipoteza fillestare rrëzohet për *p-* vlerat më të vogla se 0.05 duke pasur kështu një interval sigurie 95%. Hipoteza fillestare nuk mund të rrëzohet për grupet 1, 3 dhe 4 për rastin e qëndrueshëm dhe për grupin 1 të rastit të paqëndrueshëm në nivelin 5%. Mund të dilet në

përfundimin se ndryshimet në luhatjet e çmimeve për shumicën e grupeve në krahasim me rastin e Pritshmërive Racionale janë statistikisht të rëndësishme.

Për të vëzhguar mënyrën se si subjektet mund të mësojnë gjatë eksperimentit janë zhvilluar të njëjtat teste, por për 25 periudhat e fundit të eksperimentit. Rezultatet janë paraqitur në Tabelën 3.4. Për të gjitha rastet nuk mund të rrëzohet hipoteza fillestare se mesataret e çmimeve janë të njëjta me mesataret e çmimeve në modelin e Pritshmërive Racionale. Ky është i njëjti konkluzion që doli përgjatë të gjithë 50 periudhave, por po të krahasojmë madhësinë e p -vlerave hipoteza fillestare pranohet në një nivel përqindjeje më të lartë.

Tabela 3.3 Testet për mesataret dhe variancën për 50 periudha

	Rasti i qëndrueshëm				*Rasti i paqëndrueshëm*				*Paqëndrueshmëri e theksuar*			
	μ=5.27		σ²=0.25		μ=5.58		σ²=0.25		μ=5.86		σ²=0.25	
	t-stat	p-value	t-stat	p-value	t-stat	p-value	t-stat	p-value	t-stat	p-value	t-stat	p-value
Grupi 1	-0.54	0.59	0.48	0.49	1.35	0.19	2017	0.14	-0.46	0.650	18.2	0.00
Grupi 2	-0.16	0.87	5.14	0.03	1.23	0.22	5.76	0.02	0.31	0.76	40.2	0.00
Grupi 3	0.36	0.72	0.36	0.55	0.94	0.35	10.7	0.01	0.02	0.99	67.5	0.00
Grupi 4	0.50	0.62	0.45	0.50	0.06	0.96	16.3	0.00	0.70	0.49	35.0	0.00

Tabela 3.4 Testet për mesataren dhe variancën për 25 periudhat e fundit

	Rasti i qëndrueshëm				*Rasti i paqëndrueshëm*				*Paqëndrueshmëri e theksuar*			
	μ=5.27		σ²=0.25		μ=5.58		σ²=0.25		μ=5.86		σ²=0.25	
	t-stat	p-value	t-stat	p-value	t-stat	p-value	t-stat	p-value	t-stat	p-value	t-stat	p-value
Grupi 1	0.16	0.87	2.64	0.11	0.78	0.44	0.01	0.90	-1.06	0.30	1.47	0.23
Grupi 2	-0.44	0.66	14.1	0.00	0.94	0.36	1.00	0.32	0.47	0.64	13.2	0.00
Grupi 3	0.43	0.67	0.01	0.97	0.65	0.52	1.62	0.21	0.38	0.71	23.6	0.00
Grupi 4	1.07	0.3	2.46	0.12	0.09	0.93	7.83	0.0	0.72	0.48	14.2	0.00

Burimi: Përpunime të autorit

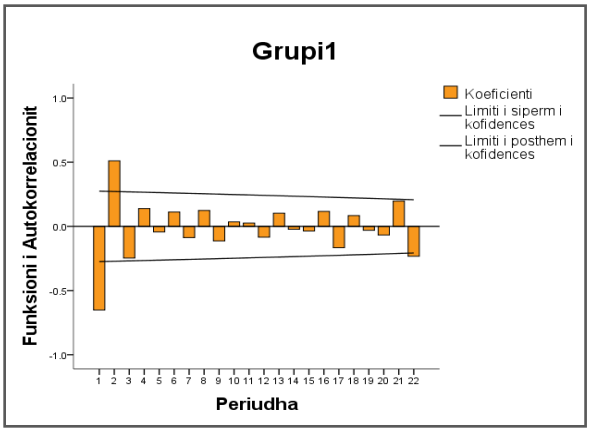
Për shembull për grupin e parë të rastit të qëndrueshëm hipoteza fillestare pranohet në nivelin 59% për 50 periudha, por në nivelin 87% për 25 periudhat e dyta të eksperimentit; mund të konkludojmë se mesatarisht subjektet mësojnë nivelin e saktë të çmimit me kalimin e kohës. Për sa i përket luhatjes së çmimeve vihet re se përveç rasteve gjatë 50 periudhave, në 3 grupe prej katër grupeve të rastit të paqëndrueshëm si dhe për Grupin 1 të rastit me paqëndrueshmëri të theksuar varianca është e njëjtë me variancën e rastit PR. Për rastet e tjera edhe pse subjeketet janë në gjendje që mesatarisht ta mësojnë nivelin e çmimit të eikuilibrit të tregut çmimet shfaqin luhatje në ekses të rastit PR.

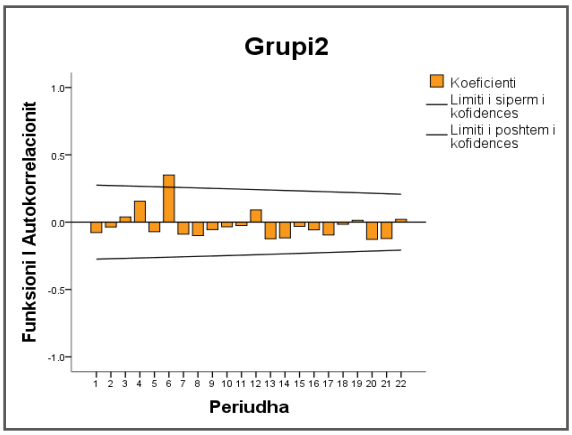
3.1.6 Parashikueshmëria e çmimeve

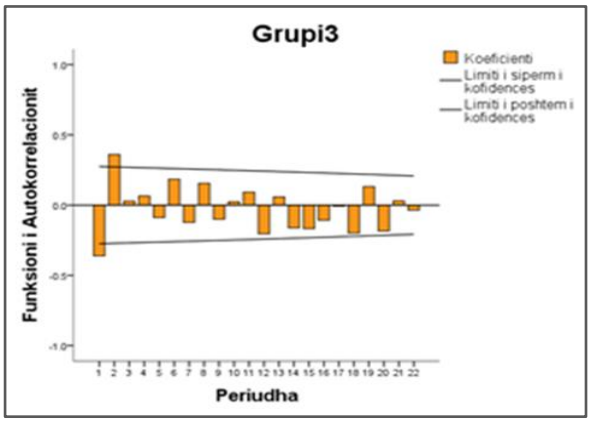
Qëllimi i këtij seksioni është të kontrollohet nëse ka ndonjë strukturë në çmimet e tregut që mund të përdoret nga subjekte inteligjente për të përmirësuar parashikimin e tyre. Forma më e thjeshtë e parashikimit është parashikimi linear, që matet nga autokorrelacionet.

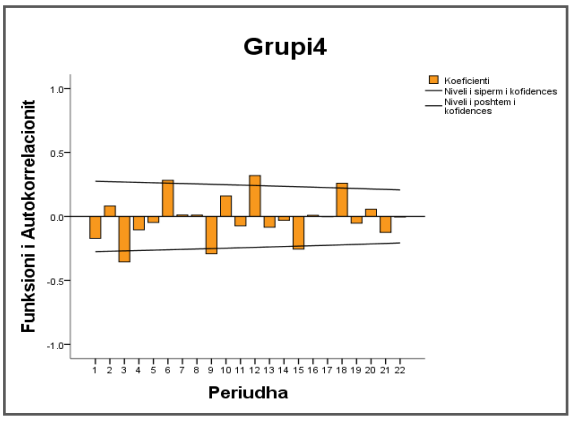
Në Figurën 3.3 tregohen grafikët e autokorrelacioneve për të gjitha rastet. Në pamje të parë vihet re menjëherë se çmimet e përftuara në tregun e stimuluar nuk paraqesin një strukturë të qartë autokorrelacioni dhe janë kryesisht të parëndësishme statistikisht. Dy grupe që tregojnë një farë strukture janë grupi 1 dhe 2 tek rasti i paqëndrueshëm, të cilat karakterizohen nga një strukturë autokorrelacioni të rregullt (+,-,+,-,+…).

Rasti i qëndrueshëm

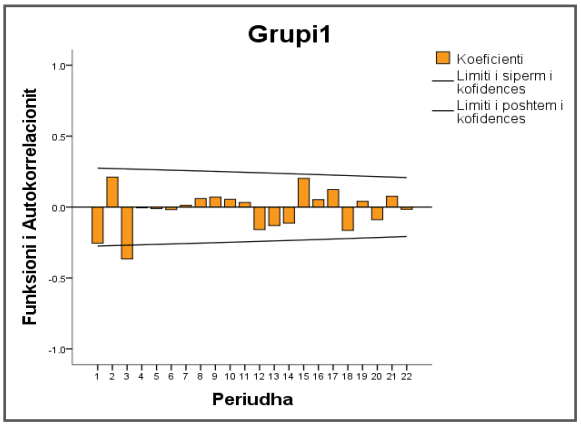


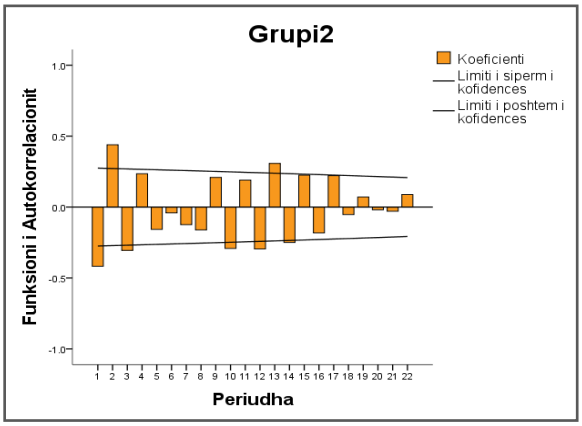


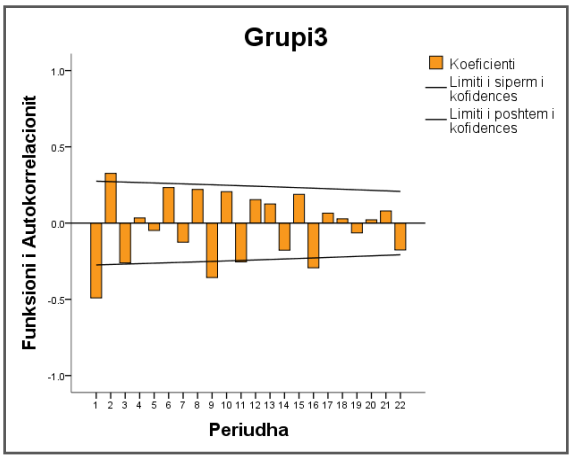


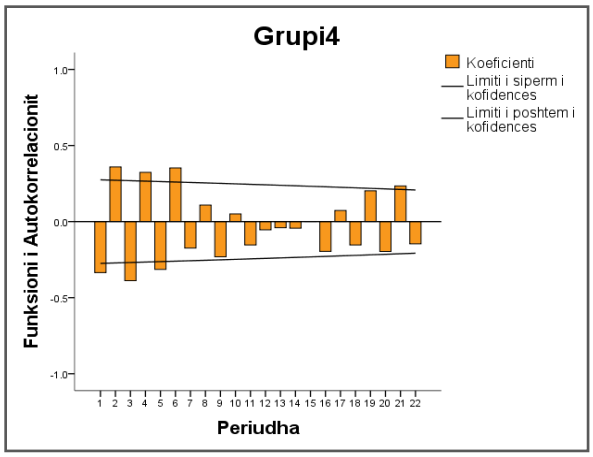


Rasti i paqëndrueshëm

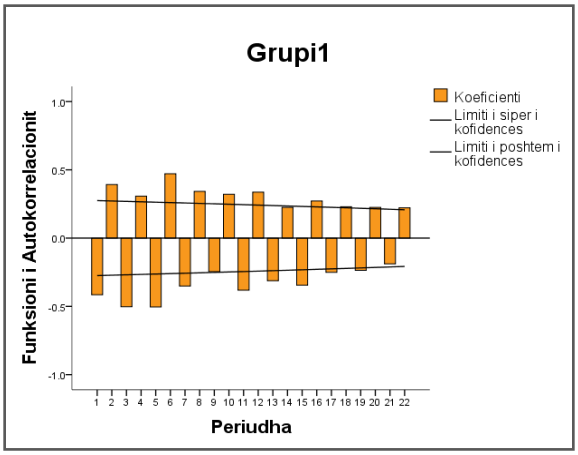


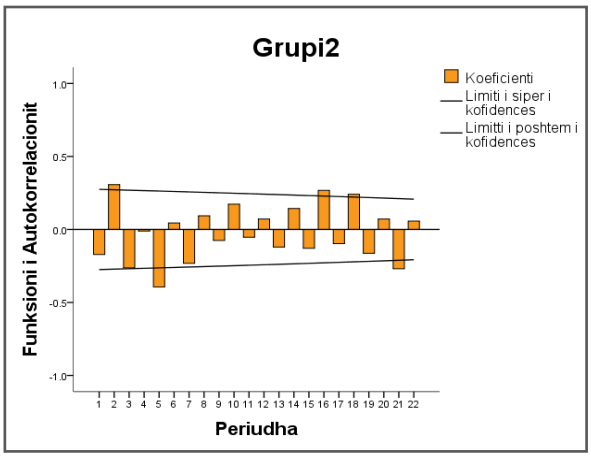


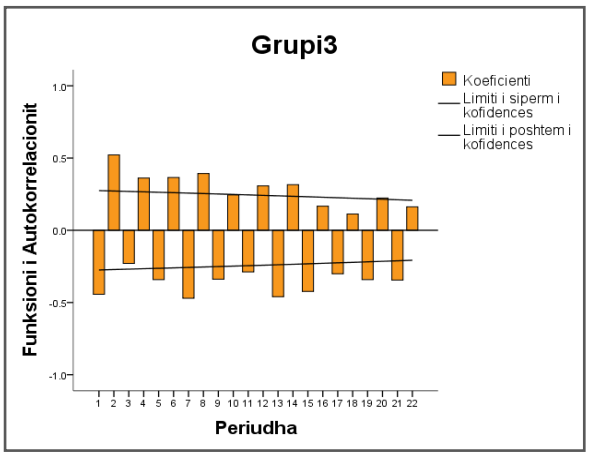




Rasti me paqëndrueshmëri të theksuar







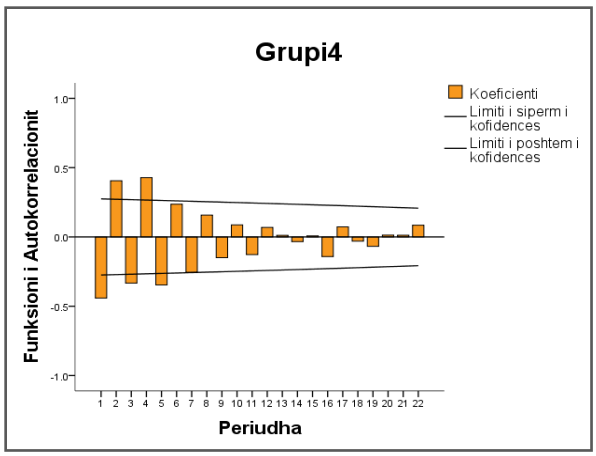


Figura3.3 Funksionet e autokorrelacionit
Burimi: Përpunime të autorit

Mund të konkludohet se në përgjithësi PR është një model i përafrueshëm në eksperimentet tona të Cobweb përsa i përket parashikimit linear. Subjektet tona nuk janë joracionale në kuptimin që nuk krijohet një strukturë e parashikueshme në çmimet e tregut nga e cila disa subjekte të caktuara mund të përftojnë. Kjo ngjason me paradigmën e Pritshmërive Racionale.

Eksperimenti krijon mundësinë e modelimit të një ekonomie ku ka heterogjenitet ku disa subjekte janë racionalë e disa jo,por kjo provon dhe sjelljen e modeleve pë studimin e ekuilibrit të tregut dhe krijon mundësinë e përzgjedhjes së modelit më të mire.

Pritshmëritë dhe efektet e tyre nuk duhen anashkaluar dhe e rëndësishme është të ndikohet që këto pritshmëri të jenë sa më racionale dhe perceptimet të mos jenë të gabuara.

3.2 Aplikimi i modelit cobweb në kushtet ekonomike të Shqipërisë

Modeli linear cobweb mund të aplikohet vetëm nëse plotësohen tre kushte:

- Prodhimi është përcaktuar plotesisht në varësi të çmimit në kushtet e konkurencës së pastër.
- Koha e prodhimit të produktit kërkon të paktën një periudhë të plotë.
- Çmimi është vendosur në varësi të ofertës në dispozicion [Frederick V. Waugh ,1964].

Natyrisht, në rastet kur çmimet e mallrave dhe produkteve janë vendosur mbi bazën e vendimeve administrative (kur mbizotëron konkurenca midis monopoleve) apo kur prodhimi s'mund t'u përgjigjet menjëherë kërkesave të ndryshuara, nuk mund të pritet të shohim reagimin sipas metodës cobweb.

Kufizimet për kushtet e konkurencës së pastër dhe marrja e vendimeve administrative shpesh ngrenë pikëpyetje përsa i përket zbatueshmerisë së modelit cobweb.

Është e rëndësishme në radhë të parë të kuptohet efektiviteti i përdorimit të teorive ekonomike dhe përdorimit të modeleve dinamike, por duhen të kemi parasysh dhe kufizimet e tyre.

Modeli i paraqitur ka përparësi kryesore dinamizmin dhe rekurencën e tij, por zbatueshmëria është e kushtëzuar nga faktorët e përmendur më sipër. Nëse do të analizonim zbatimin në kushtet e vendit tonë dalin në pah mjaft probleme, të cilat ndrydhin mundësinë e zbatimit të tij.

Gjatë viteve të tranzicionit nuk mund të flasim për një zhvillim të planifikuar, të qëndrueshëm e të mirë orientuar të bujqësisë. Zbatimi i modelit të paraqitur është një mundësi shumë e mirë për të orientuar prodhimin dhe tregun drejt ekuilibrave të qëndrueshëm, pasi në vitet e fundit kanë ndryshuar në mënyrë të theksuar strukturat dhe karakteristikat e ekonomisë bujqësore dhe çmimet kanë evoluar në mënyrë komplekse e shpesh pa rregulla.

Bujqësia ka një vend të rëndësishëm në zhvillimin e ekonomisë në Shqipëri. Sipas Zyrës së Bankës Botërore në Tiranë bujqësia zë 21% të prodhimit të brendshëm bruto dhe përbën 58% të punësimit në vend, e sipas burimeve të Ministrisë së Bujqësisë zë 16.8% në treguesit makro. Duke u bërë një indikator i tendencës makro, luhatja e çmimeve transmeton presion inflacionist edhe në produktet e tjera dhe krijon kështu një impakt në rritjen e indeksit të çmimeve, në jetën e përditshme e në zhvillimin ekonomik e shoqëror.

Sipas të dhënave nga INSTAT Indeksi i Çmimeve të perimeve ka pësuar ndryshime të dukshme në vitet 2003-2013. Ndryshimi vjetor është marrë në krahasim me vitin paraardhës. Në

muajin Mars 2013 sipas të dhënave të Ministrisë së Bujqësisë vërejmë luhatje të çmimit të perimeve në rang kombëtar dhe sipas zonave që shkojnë edhe deri në 35% për produkte të veçanta. Grafikët paraqesin një luhatje dhe rritje të çmimeve të perimeve.

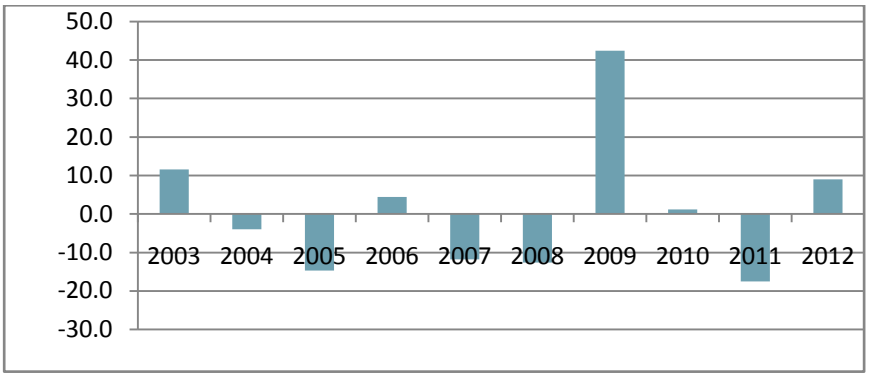


Figura 3.4 Indeksi në % i çmimeve të konsumit (perimet duke përfshirë dhe patatet)
Burimi:INSTAT

Luhatjet e çmimeve të perimeve vërehen jo vetëm në rang vendi, por për të njëjtin produkt, në zona të ndryshme ka përsëri luhatje të tyre e kjo për arsye të relievit dhe kushteve klimaterike të ndryshme.

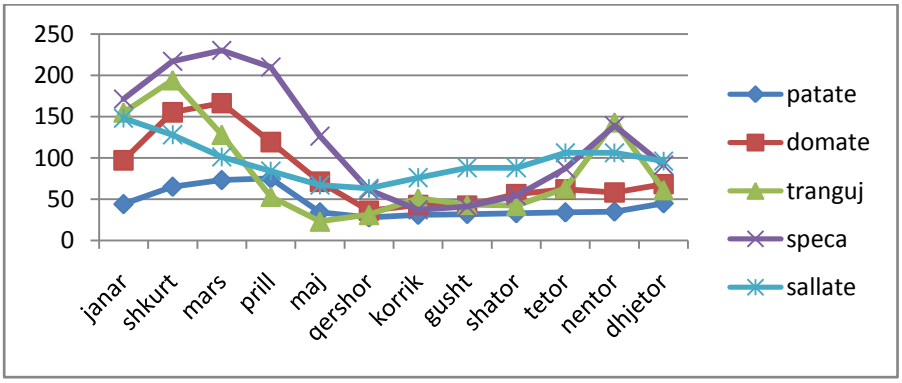


Figura 3.5: Çmimet e perimeve për vitin 2011
Burimi:Ministria e Bujqësisë, Ushqimit dhe Mbrojtjes së Konsumatorit

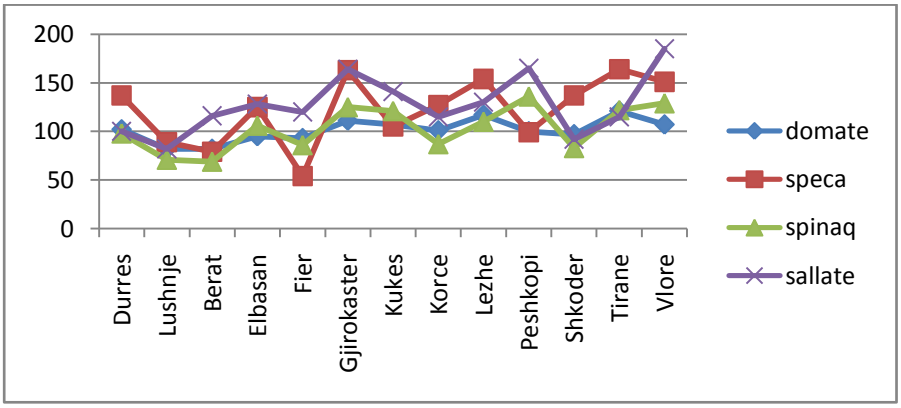


Figura 3.6: Çmimet e perimeve sipas zonave.
Burimi: Ministria e Bujqësise ,Ushqimit dhe Mbrojtjes se Konsumatorit

Shumë ekonomistë kanë kryer studime për të gjetur shkaqe të kësaj rritjeje. Zhang (1997) thekson se rritja e çmimeve ka dy arsye: Së pari për shkak të ndryshimit të kostos së prodhimit dhe së dyti për shkak të qarkullimit më të hapur të tregut Lingling X. (2012) tregon se krahas rritjes së kostos së prodhimit edhe prodhimi vendas është i pamjaftueshëm. Studiuesit gjithnjë e më shumë i japin rëndësi arsyeve të luhatjes së këtyre çmimeve. Faktorë të ndryshëm si cikli i rritjes, kostoja bujqësore, prodhimi jo i organizuar në ferma të mëdha rrethana të jashtme të pasigurta, përdorimi i produkteve zëvendësuese, politikat qeveritare etj. Tregu i ndikuar nga ndërhyrje të jashtme bën që çmimet të devijojnë nga çmimi ekuilibër e më pas këtyre luhatjeve bëhen të mëdha dhe pika e ekuilibrit tregon prirje divergjence. Suoping (2006) mendon se çmimi i prodhimit të një viti të mëparshëm është vendimtar në prodhimin e këtij viti. Modeli cobweb është futur fillimisht nga Moore, Moore (1925) për të analizuar sjelljen ciklike të tregjeve bujqësore dhe është një nga modelet e para dinamike në ekonomi. Që në vitin 1917 Moore kishte treguar se çmimi aktual i produktit bujqësor është përcaktuar nga prodhimi, ndërsa prodhimi i vitit të ardhshëm është përcaktuar nga çmimi i vitit paraardhës.

Nisur nga kushtet e vendit tonë, le të analizojmë çfarë e pengon zbatimin e këtij modeli. Tendencat e viteve të fundit tregojnë se Shqipëria ka potenciale për një sektor modern e konkurues, nëse ndërtohen politika brenda konteksit të standarteve e kërkesave aktuale dhe të prespektivës së BE.

Ne këtë kuadër sfidë kryesore është transformimi i bujqësisë në një sektor modern të ekonomisë së tregut, konkurues paralel me krijimin e mundësive për të ardhura alternative.

Duke qëne se sektori bujqësor siguron 53% të GDP bujqësia ka fituar statusin e sektorit prioritar në politikat mbështetëse të qeverisë e megjithatë ka mjaft pengesa të konsiderueshme që lidhen me aftësinë për një konkurencë të pastër e në rritje.

Të dhëna nga treguesit e zhvillimit të Bankës Botërore tregojnë se vetëm për vitin 2007 mbështetja e drejtpërdrejtë ka qëne rreth 7 milion euro dhe qeveria shqiptare ka rritur fondet buxhetore për agrobiznesin dhe subvencionet. Por mendoj se jo gjithmonë subvencionet janë efektive.

Duhet bërë hartimi i programeve të zhvillimit, i cili do të ndihmojë që të bëhen investimet e duhura me anën e grandeve konkurues që janë me efiçente e më pak të deformuar sesa mbështetja me anën e subvencioneve. Nëse do të analizohet mbështetja e dhënë nga qeveria për naftën dhe plehrat kimike del në pah joefiçenca për disa arsye:

Moszbatimi i plotë i ligjeve të aprovuara, që sjell mungesën e transparencës dhe shfaqjen e korrupsionit.

Ngaqë mungon informacioni i plotë për fermat potenciale, mbështeten ferma që kanë më pak se 30% efiçencë.

Për shkak të korrupsionit nafta përfundon te tregëtarët e saj dhe nuk përfitojnë realisht fermerët. Investimi bëhet në zona jo të begata, pra shkon për zbutjen e varfërisë. Për rrjedhojë, krijohet superprodhim vetëm në disa produkte e vendosen çmime artificiale. Të gjitha këto e të tjera arsye çojnë në një zhvillim jo të qëndrueshëm e pa strategji të qarta.

3.2.1 Propozime dhe strategji

Faktorë të ndryshëm natyrorë në bujqësi diktojnë luhatje të cikleve të prodhimit, por kryesore është përcaktimi i tendencës për të shkuar drejt pikës së ekuilibrit. Në projektimin e çmimeve dhe sasisë së prodhimit për vitet e ardhshëm, ekonomistët duhet të studjojnë edhe trendet në variablat popullsi dhe produktivitet. Modeli cobweb krijon mundësinë e studimit për të marrë parasysh çmimet reale të periudhave të mëparshme në mënyrë që prodhimi të mos zgjerohet vetëm për arsye se në një periudhë ka qënë më i lartë se çmimi i ekuilibrit.

Duhen analizuar tendecat e çmimeve në treg dhe pastaj të merren vendime racionale për sasinë e prodhimit. Pengesë e madhe është edhe mungesa e infrastrukturës dhe marketingut, prandaj duke përmirësuar qarkullimin, rrjetin e supermarketeve, logjistikën e shpërndarjes, sigurimin e transportit efikas, ruajtjen dhe tregtimin në qytete, ndikohet në uljen e çmimit të perimeve.

Rritja e çmimit të prodhimit të perimeve nuk lejon shtimin e fitimit të prodhimit, prandaj duhet ngritur tregu bujqësor duke përdorur metoda shkencore dhe efikase.

Me rritjen e standartit të jetesës kërkesa për produktet bimore bëhet më e lartë ndërkohë që perimet janë sezonale dhe alternative prandaj nevojitet të ndërtohen strategjitë përkatëse të diferencimit të produkteve.

Të krijohet një sistem i cilësisë standarte dhe të promovohet e zgjerohet prodhimi i produkteve organike, duke i dhënë përparësi prodhimit vendas dhe jo importit; duke rritur sigurinë e bazës së prodhimit që ajo të jetë e shëndetshme dhe organike.

Regjistrimi i produkteve ‘markë’ jo vetëm krijon mundësinë e tregtimit më të mirë, por lejon zgjerimin e tregut në vendet e Bashkimit Evropian.

Zgjerimi i fermave nëpërmjet kooperimit të prodhuesve të vegjël krijon mundësinë që prodhimi i organizuar t’i rezistojë më mirë rreziqeve të tregut të mbështetura këto edhe nga qeveria. Të dhëna nga treguesit e zhvillimit të Bankës Botërore tregojnë se vetëm për vitin 2007 mbështetja e drejtpërdrejtë ka qenë rreth 7 milion euro dhe qeveria shqiptare ka rritur fondet buxhetore për agrobiznesin dhe subvencionet, por jo gjithmonë ato kanë shkuar për modernizimin dhe efikasitetin në prodhimin e produkteve bujqësore.

Fondet e mbështetjes duhet të orientohen në nxitjen e investimeve dhe strategjive për zhvillim të qëndrueshëm dhe sektor konkurues.

Hartimi i programeve të zhvillimit është më efiçent sesa një mbështetje me anën e subvencioneve.

Të krijohet një model për strategjinë e tranzicionit drejt fermave që përdorin energjinë alternative. Nuk duhet të subvencionohet nafta dhe plehrat kimike, por duhet të ndryshojnë planet e biznesit, pasi si pasojë do të kishim monopole të prodhimit në disa produkte agroindustriale, rënie të sigurisë ushqimore, çmime arbitrare dhe jo të ekilibruara.

Kompanitë duhet të ndryshojnë mënyrën e punës së tyre, të testojnë planet për prodhimin dhe llojet e tij duke korrigjuar ritmin dhe strategjitë. Të gjitha këto arsye janë të konsiderueshme e për pasojë pengojnë analizën dhe zbatimin konkret të modeleve matematikore të paraqitura.

3.3 Modeli dinamik cobweb me funksion jolinear të kërkesës dhe ofertes për tregun e pasurive të patundshme

Modelet Cobweb përshkruajnë dinamikën e çmimit në treg. Në modelet ekonomike janë demostruar shumë shembuj të kaosit cobweb C. H. Hommes(1994), A. Matsumoto(1999), B.Finkenstadt (1995) zbatojnë modelin ku oferta është një funksion linear dhe kërkesa një funksion jolinear. Hommes (1994) dhe disa autorë të tjerë përdorin funksionin linear të kërkesës me funksion jolinear të ofertës. Këto punime tregojnë se modeli jolinear cobweb shpjegon fluktuacione të ndryshme të vërejtura në të dhëna reale ekonomike. Në artikullin Mulla P., Xhaja E., Hoxha F. (2014) është studjuar modeli cobweb me funksion jolinear te kërkesës dhe ofertës i aplikuar në tregun e pasurive të patundshme, ndërsa në punimin Mulla P. (2014) është trajtuar një model jolinear për studimin e çmimeve të perimeve.

3.3.1 Modele jolineare për tregun e pasurive të patundshme

Supozojmë që sipërmarrësit e pasurive të patundshme në treg i përkasin një grupi përfituesish që kanë një qëllim përfitimi të përbashkët. Zakonisht çmimi p karakterizohet nga funksioni i kërkesës $p = a - b\sqrt{Q}$, ku a, b janë konstante positive a- është çmimi maksimal në treg dhe Q është sasia totale në treg. Formalizimi i kësaj formule është si më poshtë:

$$K_1(t) = b_0 - b_1 p_1(t) + b_2 p_1^2(t), \quad K_2(t) = c_0 - c_1 p_2(t) + c_2 p_2^2(t) \qquad (3.6)$$

ku $b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2$ janë konstante positive, $p_1(t)$ është çmimi i tokës në kohën t, $p_2(t)$ është çmimi i ndërtimit në kohën t, $K_1(t)$ është çmimi i kërkesës për tokën në kohën t dhe $K_2(t)$ është çmimi i kërkesës për ndërtime në kohën t. Sipas ligjit të kërkesës që koeficienti i kurbës së kërkesës të jetë negativ, çmimet $p_1(t)$ dhe $p_2(t)$ duhet përkatësisht të kënaqin mosbarazimet: $2b_2 p_1(t) - b_1 < 0$ dhe $2c_2 p_2(t) - c_1 < 0, 4b_2 b_0 - b_1^2 > 0, 4c_2 c_0 - c_1^2 > 0$, kështu shenjat e ekuacioneve të kërkesës në formulën (3.6) janë pozitive. Në këtë rast, çmimi i tokës dhe tregu i ndërtimeve janë proporcionale, edhe megjithëse tregu i ndërtimeve nuk influencon direkt në tregun e tokës, çmimi i tokës influencon te ndërtimet, i cili ulet me rritjen e çmimit të tokës. Kompanitë e pasurive të patundshme përshtasin ofertën e ndërtimeve sipas politikave relative dhe situatës së çmimit të ndërtimeve dhe çmimit të tokës. Formula e ofertës ka formën e mëposhtme

$$S_1(t) = e_0 + e_1 p_1(t) + e_2 p_1^2(t), S_2(t) = d_0 + d_1 p_2(t) + d_2 p_2^2(t) - d_3 p_1(t). \qquad (3.7)$$

ku $d_0, d_1, d_2, d_3, e_0, e_1, e_2$ janë konstante positive, $S_1(t)$ është oferta e tokës në kohën t, dhe $S_2(t)$ është oferta e ndërtimeve në kohën t. Meqë $2e_2 p_1(t) + e_1 > 0$ dhe $2d_2 p_2(t) + d_1 > 0$, mund të konfirmojmë që koeficienti këndor i kurbës së ofertës është pozitiv dhe është në përputhje me ligjin e ofertës. Ekonomistët fillojnë të ofrojnë produktet vetëm kur

$$p_1(t) > \frac{-e_1+\sqrt{e_1^2-4e_2e_0}}{2e_2}, p_2(t) > \frac{-d_1+\sqrt{d_1^2-4d_2d_0}}{2d_2}. \quad (3.8)$$

Përcaktojmë,

$$Z(p) = K(p) - S(p). \quad (3.9)$$

$Z(p)$ është funksioni i rritjes së kërkesës që sjell uljen e çmimit, i cili përcakton ndryshimin midis kërkesës dhe ofertës. Kur çmimi është i ulët, ka kërkesë të lartë dhe kur çmimi është i lartë ka pak ofertë, kështu p^* që kënaq ekuacionin $Z(p^*) = 0$ quhet pikë ekuilibri.
Duke zëvendësuar (3.7) dhe (3.8) te (3.9), përftojmë

$$Z\big(p_1(t)\big) = b_0 - e_0 - (e_1 + b_1)p_1(t) + (b_2 - e_2)p_1^2(t), t = 0,1,2,\cdots \quad (3.10)$$

$$Z\big(p_2(t)\big) = c_0 - d_0 - (d_1 + c_1)p_2(t) + (c_2 - d_2)p_2^2(t) + d_3p_1(t). \quad (3.11)$$

Meqë $Z(p)$ ndjek ligjin e kërkesës, qëndrojnë kushtet e mëposhtme:

$$\begin{gathered} b_2 - e_2 > 0, \\ c_2 - d_2 > 0, \\ 2(c_2 - d_2)p_2(t) - (d_1 + c_1) < 0, \\ 2(b_2 - e_2)p_1(t) - (e_1 + b_1) < 0. \end{gathered} \quad (3.12)$$

α_1 është një parametër rregullator i çmimit të tokës, i cili tregon shkallën e përshtatjes së çmimit të tokës të kontrolluar nga shteti nëpërmjet planit të ofertës së tokës. α_2 është parametri rregullator i çmimit të ndërtimit, modeli dinamik i çmimit të tokës dhe çmimi i ndërtimit mund të vendosen si më poshtë:

$$p_1(t) = p_1(t-1) + \alpha_1 Z\big(p_1(t-1)\big), t = 0,1,2,\cdots \quad (3.13)$$

$$p_2(t) = p_2(t-1) + \alpha_2 Z\big(p_2(t-1)\big). \quad (3.14)$$

ku α_1 dhe α_2 janë parametra pozitivë.

3.3.2 Analiza e qëndrueshmërisë

Bifurkacioni dhe kaosi. Nga studimi i formulës (3.14) përftohen

$$p_1(t) = p_1(t-1) + \alpha_1[b_0 - e_0 - (e_1 + b_1)p_1(t-1) + (b_2 - e_2)p_1^2(t-1)]$$

$$p_2(t) = p_2(t-1) + \alpha_2[c_0 - d_0 - (d_1 + c_1)p_2(t-1) + (c_2 - d_2)p_2^2(t-1) + d_3 p_1(t-1)]$$

$$t = 0,1,2,\cdots \tag{3.15}$$

Le të jetë

$$u = \frac{\alpha_1(e_2 - b_2)}{1+\alpha_1\sqrt{(e_1+b_1)^2 - 4(e_0 - b_0)(e_2 - b_2)}},$$

$$U = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1-\alpha_1(e_1+b_1)}{1+\alpha_1\sqrt{(e_1+b_1)^2 - 4(e_2 - b_2)(e_0 - b_0)}}, \tag{3.16}$$

$$x(t) = up_1(t) + U.$$

Një trajtë më e përmbledhur e ekuacionit të parë të (3.15) është:

$$x(t) = \lambda x(t-1)(1 - x(t-1)), \tag{3.17}$$

ku $\lambda = 1 + \alpha_1\sqrt{(e_1 + b_1)^2 - 4(e_2 - b_2)(e_0 - b_0)}$. Kjo është trajta e përgjithshme e ekuacionit logjistik diskret. Qëndrueshmëria e $x(t)$ varion me ndryshimin e λ sipas rregullit logjistik.
Në qoftë se $\alpha_1 < 0$, atëherë $\lambda < 1$ implikon që ekziston vetëm një pikë fikse në sistemin (3.15), megjithatë $\alpha_1 < 0$ është e papërfillshme.

Në qoftë se $0 \le \alpha_1 < 2/\sqrt{(e_1 + b_1)^2 - 4(e_2 - b_2)(e_0 - b_0)}$, atëherë $1 \le \lambda < 3$ implikon që ekzistojnë dy pika fikse në sistemin (3.15) dhe shfaqet bifurkacioni.Në qoftë se,

$$2/\sqrt{(e_1 + b_1)^2 - 4(e_2 - b_2)(e_0 - b_0)} \le \alpha_1 \le \sqrt{6}/\sqrt{(e_1 + b_1)^2 - 4(e_2 - b_2)(e_0 - b_0)},$$

atëherë $3 \le \lambda \le 1 + \sqrt{6}$ implikon që ekzistajnë katër pika fikse në sistemin (3.15) dhe shfaqet bifurkacioni me periodë dyfishe. Kur λ rritet, numri i pikave fikse vazhdon të rritet deri sa $\lambda = 3.5699$ kur $\alpha_1 = 2.5699/\sqrt{(e_1 + b_1)^2 - 4(e_2 - b_2)(e_0 - b_0)}$, vlera e $x(t)$ nuk është e barabartë në çdo pikë që u diskutua më sipër dhe sistemi hyn në kaos në bifurkacion me periodë dyfishe.
I njëjti argumentim qëndron edhe për ekuacionin e dytë të formulës (3.15). Le te jetë $\alpha_1 = 0$:
Kur $0 < \alpha_2 < 2/\sqrt{(d_1 + c_1)^2 - 4(d_0 - c_0)(d_2 - c_2)}$, ndeshet bifurkacion.
Kur $2/\sqrt{(d_1 + c_1)^2 - 4(d_0 - c_0)(d_2 - c_2)} \le \alpha_2 \le \sqrt{6}/\sqrt{(d_1 + c_1)^2 - 4(d_0 - c_0)(d_2 - c_2)}$, ndeshet bifurkacion me periodë dyfishe.

Kur $\alpha_2 = 2.5699/\sqrt{(d_1 + c_1)^2 - 4(d_0 - c_0)(d_2 - c_2)}$, sistemi hyn në gjendje kaosi.

Në vijim diskutohet qëndrueshmëria e pikave fikse të sistemit dinamik (3.15) nëpërmjet analizimit të vlerave vetjake të ekuacionit asimtotik linear të formulës (3.15). Përftohen katër pika fikse të funksionit diferencë (3.15)

$$E: \begin{cases} p_1 = \frac{b_1+e_1 \pm \sqrt{(e_1+b_1)^2-4(e_2-b_2)(e_0-b_0)}}{2(b_2-e_2)} \\ p_2 = \frac{d_1+c \pm \sqrt{(d_1+c_1)^2-4(c_2-d_2)(c_0-d_0+d_3p_1)}}{2(c_2-d_2)} \end{cases} \tag{3.18}$$

nëse:

$$\begin{gathered} (e_1 + b_1)^2 - 4(e_2 - b_2)(e_0 - b_0) \geq 0, \\ (d_1 + c_1)^2 - 4(c_2 - d_2)(c_0 - d_0 + d_3 p_1) \geq 0. \end{gathered} \tag{3.19}$$

Lema 3.1. Ekuilibri

$$E_1\left(\frac{b_1+e_1 \pm \sqrt{(e_1+b_1)^2-4(e_2-b_2)(e_0-b_0)}}{2(b_2-e_2)}, \frac{d_1+c \pm \sqrt{(d_1+c_1)^2-4(c_2-d_2)(c_0-d_0+d_3p_1)}}{2(c_2-d_2)}\right) \tag{3.20}$$

është një pikë ekuilibri jo e qëndrueshme

3.3.3 Simulime numerike

Për të studiuar dinamikën komplekse të sistemit (3.16) është i përshtatshëm përdorimi i parametrave me vlerat e mëposhtme:

$$b_0 = 1.2, b_1 = 2, b_2 = 1.6, c_0 = 4, c_1 = 1.6, c_2 = 0.04,$$

$$d_0 = 0, d_1 = 3, d_2 = 0.02, d_3 = 0.4, e_0 = 0.5, e_1 = 0.3, e_2 = 0.2. \tag{3.21}$$

Më poshtë është simuluar modeli logjistik diskret (3.15) për vlera të ndryshme të α_1, sipas analizës së diskutuar në paragrafet e mësipërme. Nga sa u tha më sipër

$$\lambda = 1 + \alpha_1\sqrt{(e_1 + b_1)^2 - 4(e_2 - b_2)(e_0 - b_0)}.$$

Dallojmë rastet:

Rasti 3.1: $\alpha_1 < 0, (\alpha_1 = -1)$ rrjedhimisht $\lambda = 0.1705$ duke përdorur vlerat e parametrave nga (3.21) përftohet grafiku i mëposhtëm:

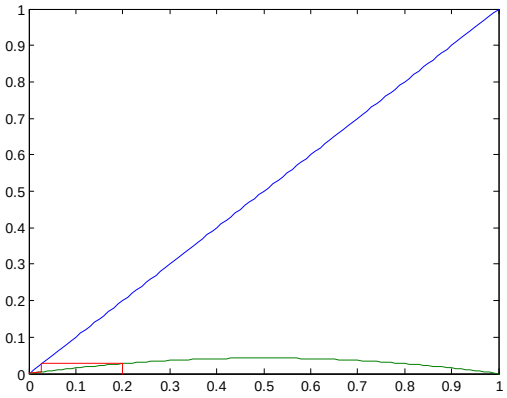


Figura 3.7 Rasti 3.1
Burimi: Përpunime të autorit

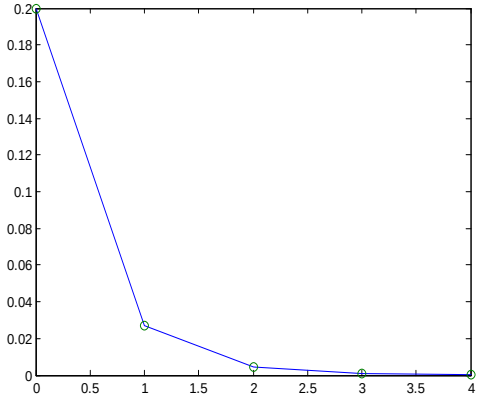


Figura 3.8: Rasti 3.1

Shihet nga grafiku që sistemi ka vetëm një pikë fikse.

Rasti 3.2: $0 \leq \alpha_1 < 2/\sqrt{(e_1+b_1)^2-4(e_2-b_2)(e_0-b_0)}$, për vlera të parametrave nga (3.21) $0 \leq \alpha_1 < 1.7087, (\alpha_1 = 1)$, rrjedhimisht $\lambda = 2.1705$ përftohet grafiku i mëposhtëm

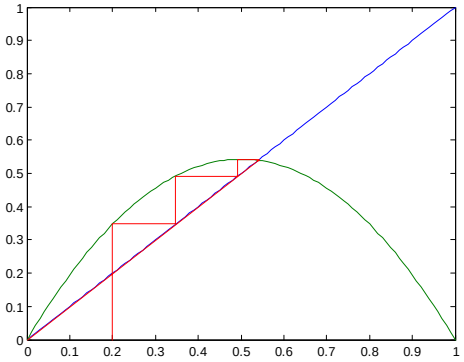


Figura 3.9: Rasti 3.2
Burimi: Përpunime të autorit

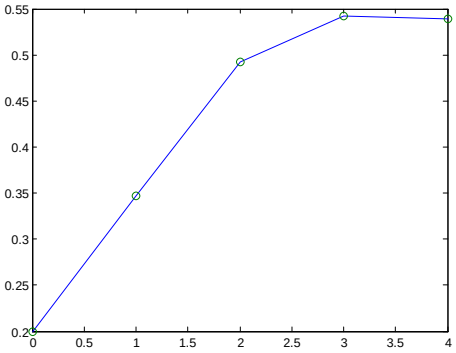


Figura 3.10: Rasti 3.2

Vihet re se sistemi ka dy pika fikse dhe shfaqet bifurkacioni.

Rasti 3.3:

$0 \leq \alpha_1 < 2/\sqrt{(e_1+b_1)^2-4(e_2-b_2)(e_0-b_0)}$ $0 \leq \alpha_1 < 2/\sqrt{(e_1+b_1)^2-4(e_2-b_2)(e_0-b_0)}$, për vlera të parametrave nga (3.21) $1.7087 \leq \alpha_1 < 2.0927, (\alpha_1 = 2)$, rrjedhimisht $\lambda = 3.35$ përftohet grafiku i mëposhtëm:

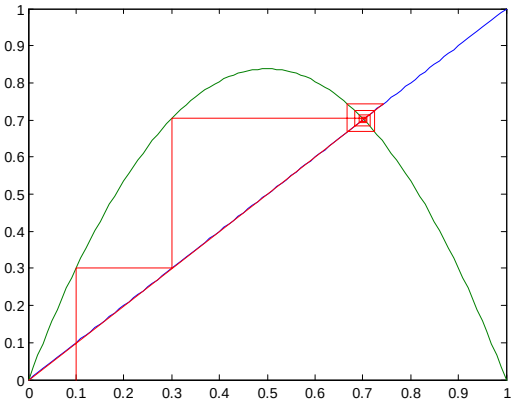


Figura 3.11: Rasti 3.3
Burimi: Përpunime të autorit

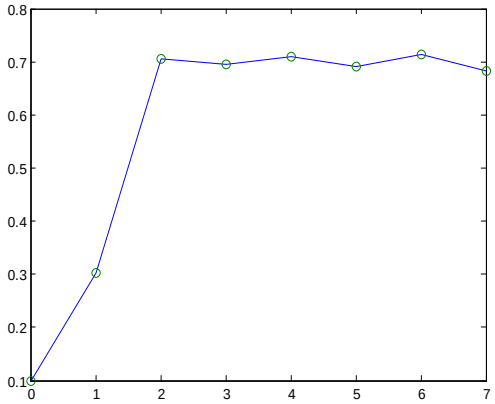


Figura 3.12: Rasti 3.3

Shihet se sistemi hyn në gjendje kaosi.

Rasti 3.4

Të shohim rastin e simulimit për ekuacionin e dytë të formulës (3.15). Le te jetë $\alpha_1 = 0$:

Kur, $0 < \alpha_2 < 2/\sqrt{(d_1 + c_1)^2 - 4(d_0 - c_0)(d_2 - c_2)}$, për vlerat e parametrave sipas (3.21) $0 < \alpha_2 < 0.4381$ ($\alpha_2 = 0.2$) rrjedhimisht $\lambda = 1.913$ ndeshet bifurkacion.

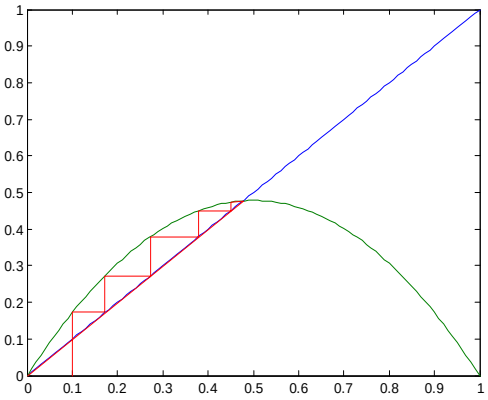
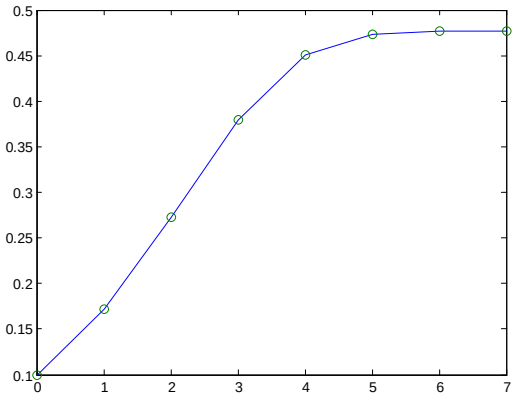


Figura 3.13: Rasti 3.4
Burimi: Përpunime të autorit



.....**Figura 3.14**: Rasti 3.4

Rasti 3.5

Kur $2/\sqrt{(d_1 + c_1)^2 - 4(d_0 - c_0)(d_2 - c_2)} \leq \alpha_2 \leq \sqrt{6}/\sqrt{(d_1 + c_1)^2 - 4(d_0 - c_0)(d_2 - c_2)}$, për vlerat e parametrave sipas (3.21) $0.4381 < \alpha_2 < 0.5366$ ($\alpha_2 = 0.5$) rrjedhimisht $\lambda = 3.2826$ ndeshet bifurkacion me periodë dyfishe.

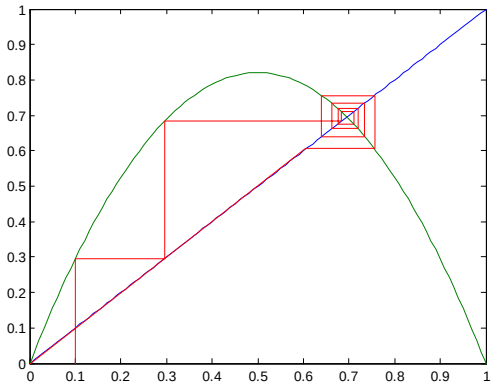


Figura 3.15: Rasti 3.5
Burimi: Përpunime të autorit

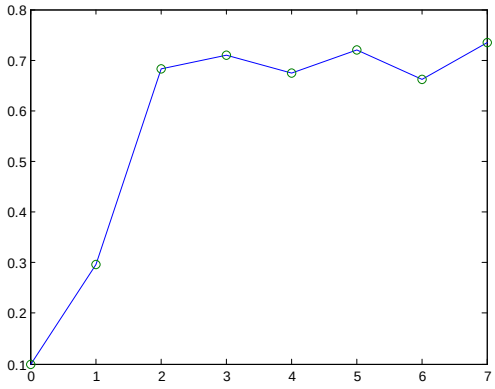


Figura 3.16: Rasti 3.5

Rasti 3.6

Kur $\alpha_2 = 2.5699/\sqrt{(d_1 + c_1)^2 - 4(d_0 - c_0)(d_2 - c_2)}$, për vlerat e parametrave sipas (3.21) $\alpha_2 = 2.5699/4.5651$ ($\alpha_2 = 0.5629$) rrjedhimisht $\lambda = 3.5697$ sistemi hyn në gjendje kaosi.

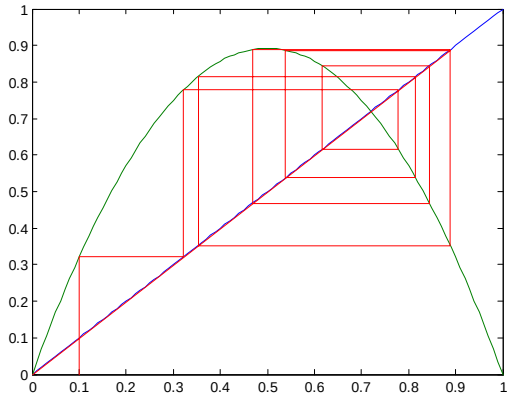


Figura 3.17: Rasti 3.6
Burimi: Përpunime të autorit

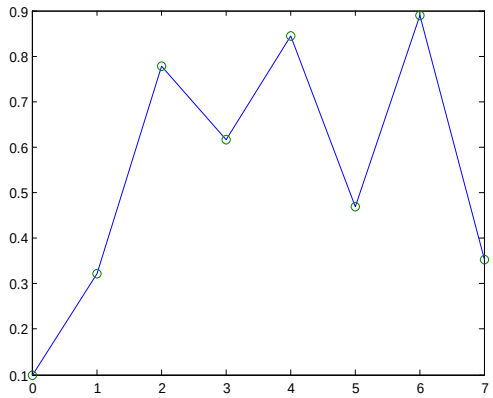


Figura 3.18: Rasti 3.6

Modeli i paraqitur është jolinear për tregun e pasurive të patundshme bazuar në teorinë cobweb. Ai është një model i thjeshtë dinamik me funksion jolinear të kërkesës dhe ofertës. Simulimet numerike janë kryer në Matlab dhe prej tyre arrijmë në konkluzione se oferta e tokës ka një influencë të dukshme në tregun e pasurive të patundshme. U vu re se luhatje shumë të vogla bëjnë që tregu të futet në një gjendje kaotike. Kombinime të ndryshme në këtë metodë të çmimit të tokës me çmimin e ndërtimeve ndihmojnë për të kaluar nga kaosi në gjendje të qëndrueshme.

3.4 Zbatimi i modelit cobweb për përcaktimin e qëndrueshmërisë së çmimit të disa produkteve bujqësore të rrethit të Sarandës

Vitet e fundit e gjithë ekonomia globale ka kaluar rastet më tragjike në historinë së ekonomisë –kriza ekonomike globale Anokye et al. (2013). Disa prej shkaqeve kanë qenë dështimet e shkaktuar nga keq aplikimet e analizave të kontrollit të riskut për debitë e këqia etj. Kriza u zhvillua shumë shpejt dhe u përhap në gjithë ekonominë globale dhe efektet e saj kanë ndikuar edhe në zhvillimin ekonomik të vendit tonë.

Për të kuptuar krizat e ekonomisë globale dhe efektet e saj të mundshme, nuk është e nevojshme vetëm gjetja e një metode e cila do të parashikojë se çfarë do të ndodhë në sektorin e biznesit dhe ekonomisë.

Në lidhje me këtë ekonomistët duhet të përdorin si metodat sasiore ashtu edhe ato cilësore për të shpjeguar situatat ekonomike të tregut. Në shumicën e rasteve ato përdorin metoda sasiore të matematikës. Kryesisht modelet e zhvilluara shprehin lidhjen midis ndryshoreve në anë të ekuacioneve ose sistemeve të ekuacioneve. Shumë metoda të tjera përfshijnë ekuacionet diferenciale në paraqitjen e marrëdhënieve midis ndryshoreve ekonomike, të cilat ndryshojnë në lidhje me kohën.

Një nga rezultatet më të rëndësishme të ekuacioneve diferenciale të zakonshme është përdorimi i ekuacionit logjistik, i diskutuar edhe në kapitullin e parë, i paraqitur me barazimin (1.11). Studiues të shumtë kanë treguar vlefshmërinë e përdorimit të ekuacionit logjistik në parashikimin e situatave në fushat e biologjisë [Amavilah, 2007], ekonomisë [Lackman, 2009] si dhe shkencat sociale R.Ramos (2013).

Në këtë paragraf do të shqyrtohet zbatimi i këtij modeli në sektorin e bujqësisë, ku si të dhëna reale janë shfrytëzuar prodhimi dhe çmimet e disa produkteve si për shembull, domateve, misrit, patateve dhe agrumeve të rrethit të Sarandës. Një prej këtyre të dhënave po i paraqesim në tabelën e mëposhtme, më të detajuara për të gjitha produktet tabelat janë të paraqitura në aneksin B të Shtojcës.

Tabela 3.5 Çmimi mesatar dhe prodhimi i domates në rrethin e Sarandës në vite.

Viti	**1994**	**1995**	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**	**2000**	**2001**	**2002**	**2003**
Cmimi	75.8	69.5	94.3	115	119	105	112	96.3	111	103
Prodhimi	740	890	950	1046	3430	780	540	620	618	710
Viti	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	
Cmimi	108	104	94	96	93	47	115	110	112	
Prodhimi	830	1025	1050	1120	1250	1323	1363	1240	1485	

Burimi: Drejtoria e Bujqësisë e Rrethit Sarandë

3.4.1 Lidhja e ekuacionit logjistik me modelin cobweb

Ekuacioni logjistik (gjithashtu i quajtur modeli Verhulst ose kurba logjistike) është një model i rritjes së popullsisë të botuar për herë të parë nga Pierre – Francois Verhulst (1845,1847) Weisstein (2009). Modeli është një funksioni i vazhdueshëm në lidhje me kohën, por një

modifikim i ekuacionit të vazhdueshëm në një ekuacion kuadratik diskret rekurent, njihet ndryshe si harta logjistike.
Një version i vazhduar i modelit logjistik përshkruhet nga ekuacioni diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = rP(1 - \frac{P}{M}) \tag{3.22}$$

ku r – është parametri Malthusian (shpejtësia e rritjes maksimale të popullsisë) dhe M - është kapaciteti mbajtës (ose popullsia maksimale). Duke pjesëtuar të dy anët me M dhe duke shënuar $X = P/M$ përftojmë ekuacionin diferencial:

$$\frac{dX}{dt} = rX(1 - X) \tag{3.23}$$

Versioni diskret i modelit logjistik përshkruhet si më poshtë:

$$X_{n+1} = rX_n(1 - X_n) \tag{3.24}$$

Gjëja e parë që bie në sy është te ekuacioni (3.24) është jolineariteti i tij. Për shkak të jolinearitetit ky ekuacion ka veti të pazëvendësueshme jo triviale. Matematikisht ai paraqet vështirësi në zgjidhjen e tij, por shumë procese biologjike, ekonomike etj janë tërësisht jolineare.
Edhe në paragrafin 3.2 është paraqitur nga ana vizive zgjidhja e ekuacionit logjistik, i cili i përshkruar shkurtimisht është si më vijim: ndërtojmë grafikun e funksionit $f(X)$, ku $f(X)$ në rastin tonë është$f(X) = rX(1 - X)$, i cili kalon nga pikat me abshisa $X = 1$ dhe $X = 0$ me maksimum në pikën me abshisë $X = 1/2$.
Kjo është një metodë grafike rekurente, gjithashtu e njohur edhe si **metoda cobweb** për përcaktimin e nivelit të popullsisë në çdo hap *n*.
Vargu i përafrimeve konvergjon në një pikë të vetme që është pikëprerja e parabolës me përgjysmoren e kuadratit të parë.
Për t'u përshtatur në të dhënat reale duhet gjetur një formulë analitike për llogaritjen e parametrave *r* dhe *M*. Për këtë vjen në ndihmë teorema e mëposhtme:

Teorema 3.1 Ekuacioni diferencial $\frac{dP}{dt} = rP(1 - \frac{P}{M})$ është një ekuacion Bernoulli ku $n = 2$.

Zgjidhja e përgjithshme e këtij ekuacioni është ekuacioni logjistik. Një zgjidhje e veçantë jepet nga ekuacioni:

$$P(t) = \frac{MP_0}{(M-P_0)e^{-rt} + P_0} \tag{3.25}$$

Parametrat e zgjidhjes specifike, të cilat përcaktohen duke përdorur çiftet e pikave në intervale kohore të barabarta $\{(t_0, P_0), (t_1, P_1), (t_2, P_2)\}$ jepen nga barazimet e mëposhtme:

$$r = \frac{1}{2} ln \left| \frac{P_2(P_1 - P_0)}{P_0(P_2 - P_1)} \right| \tag{3.26}$$

$$M = \frac{P_1(P_0P_1 + P_1P_2 - 2P_0P_2)}{P_1^2 - P_0P_2} \tag{3.27}$$

ku $t_1 \neq 0$, $P_0, P_1, P_2 \neq 0$, ku këto vlera janë marrë në intervale të njëjta kohore.

3.4.2 Studimi i qëndrueshmërisë së ekuacionit logjistik

Koncepti i qëndrueshmërisë (ose ekuilibrit) lidhet me mungesën e ndryshimeve në sistem. Në kontekstin e ***ekuacioneve me diferenca*** gjendja e qëndrueshme X_{SS} përkufizohet si më poshtë:

$$X_{n+1} = X_n = X_{SS} \tag{3.28}$$

Për ekuacionin logjistik, gjendje të qëndrueshme kemi atëherë kur

$$X_{SS} = rX_{SS}(1 - X_{SS}) \tag{3.29}$$

$$rX_{SS}^2 - X_{SS}(r - 1) = 0 \tag{3.30}$$

Janë të mundshme dy gjendje:

$$X_{SS1} = 0 \text{ dhe } X_{SS2} = 1 - \frac{1}{r} \tag{3.31}$$

Nga përkufizimi një gjendje është e qëndrueshme kur ajo është e arritshme nga gjendjet fqinje, në të kundërt ajo është e paqëndrueshme, pra sistemi do të dalë nga një gjendje e caktuar edhe me një turbullim shumë të vogël.
Qëndrueshmëria është një veti lokale. Ajo mund të llogaritet duke turbulluar shumë pak X_n nga gjendja e qëndrueshme dhe më pas shohim evoluimin e turbullimit. Në qoftë se ai zvogëlohet ($X_n > X_{n+1} > \cdots$), do të thotë se turbullimi nuk është shuar dhe gjendja është e qëndrueshme. Në të kundërt ($X_n < X_{n+1} < \cdots$) turbullimi e ka nxjerrë sistemin nga gjendja e qëndrueshme.

Le ta aplikojmë këtë në rastin e ekuacionit logjistik (për gjendjet e qëndrueshme X_{SS1} dhe X_{SS2}).

$$X_{SS} \xrightarrow{turbullim} X_n = X_{SS} + x_n \tag{3.32}$$

Në hapin tjetër,

$$X_{n+1} = X_{SS} + x_{n+1} \tag{3.33}$$

Duke kombinuar ekuacionin (3.24) dhe ekuacionin (3.33) përftojmë

$$x_{n+1} = X_{n+1} - X_{SS}$$

$$= f(X_n) - X_{SS}$$

$$= f(X_{SS} + x_n) - X_{SS} \tag{3.34}$$

Ekuacioni (3.34) është i paqëndrueshëm sepse ai kërkon gjetjen e vlerës së funksionit f në $X_{SS} + x_n$, e cila është e panjohur. x_n është e vogël krahasuar me X_{SS} dhe e zbërthejmë funksionin sipas formulës së Teilorit rreth X_{SS}.

$$f(X_{SS} + x_n) = f(X_{SS}) + \left(\frac{df}{dX}\right)_{X=X_{SS}} x_n + O(x_n^2) \tag{3.35}$$

Kështu përafrimi

$$x_{n+1} \cong f(X_{SS}) - X_{SS} + \left(\frac{df}{dX}\right)_{X=X_{SS}} = \left(\frac{df}{dX}\right)_{X=X_{SS}} x_n \tag{3.36}$$

mund të shkruhet si

$$x_{n+1} \cong a x_n \tag{3.37}$$

ku

$$a = \left(\frac{df}{dX}\right)_{X=X_{SS}} \tag{3.38}$$

Duket që në qoftë se $|a| < 1$, gjendja është e qëndrueshme (turbullimet x_n shkojnë në zero kur n rritet), ndërkohë që në qoftë se $|a| > 1$, gjendja është e paqëndrueshme (turbullimet rriten kur n rritet).

Në rastin e ekuacionit logjistik, për gjendjen e qëndrueshme X_{SS1} kemi,

$$a = \left(\frac{df}{dX}\right)_{X=X_{SS\,1}} = (r - 2rX)_{X=X_{SS\,1}} = r \tag{3.39}$$

Kështu gjendja X_{SS1} është e qëndrueshme në qoftë se $r < 1$.

Në mënyrë të ngjashme, për gjendjen e dytë X_{SS2}, kemi

$$a = \left(\frac{df}{dX}\right)_{X=X_{SS\,1}} = (r - 2rX)_{X=X_{SS\,1=1-1/r}} = 2 - r \tag{3.40}$$

Arrijmë në konkluzionin se gjendja X_{SS2} e ekuacionit logjistik do të jetë e qëndrueshme kur $1 < r < 3$. Gjendja X_{SS1} bëhet e paqëndrueshme kur gjendja e dytë X_{SS2} fillon të ekzistojë dhe është e qëndrueshme.

Interpretimi grafik i qëndrueshmërisë është që tangentja ndaj $f(x)$ në pikën e ekuilibrit duhet të ketë koeficient më të vogël se 1.

Për të pasur një udhëzues, i cili do të na ndihmojë në interpretimin e rezultateve të përftuara nga zbatimi i të dhënave reale në modelin cobweb po paraqesim tabelën e mëposhtme ku tregohet se çfarë pritshmërie kemi për vlera të ndryshme të koeficientit r.

Tabela 3.6 Vlerat e 10 iteracioneve të para të ekuacionit 3.24 për vlera të ndryshme të r

r=0.1	r=0.2	r=0.3	r=0.5	r=1.0
0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000
0.0090	0.0180	0.0270	0.0450	0.0900
0.0009	0.0035	0.0079	0.0215	0.0819
0.0001	0.0007	0.0023	0.0105	0.0752
0.0000	0.0001	0.0007	0.0052	0.0695
0.0000	0.0000	0.0002	0.0026	0.0647
0.0000	0.0000	0.0001	0.0013	0.0605
0.0000	0.0000	0.0000	0.0006	0.0569
0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0536
0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0507
0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0482

Burimi: Përpunime të autorit

3.4.3 Studimi i qëndrueshmërisë dhe parashikueshmërisë mbi të dhëna reale

Për **agrumet** duke shfrytëzuar të dhënat nga viti 2004-2012 dhe duke përdorur intervale kohore të barabarta, përkatësisht $t_1 = 2, t_1 = 3, t_1 = 4$, përfohen koeficientët e rritjes dhe vlerat maksimale si në tabelën e mëposhtme:

Tabela 3.7 Koeficientët ***r*** dhe *M* për intervale të ndryshëm kohorë**.**

t1	2	3	4
r	-0.1392	-0.1322	0.3541
M	248.9395	283.537	10317

Burimi: Përpunime të autorit

Në grafikët e mëposhtëm po paraqesim studimin e bërë duke filluar nga viti 1994.

Rasti 1

Në këtë rast nga llogaritjet koeficienti është$r = -0.8091, t_1 = 2$ dhe vihet re që kemi të bëjmë me kaos.

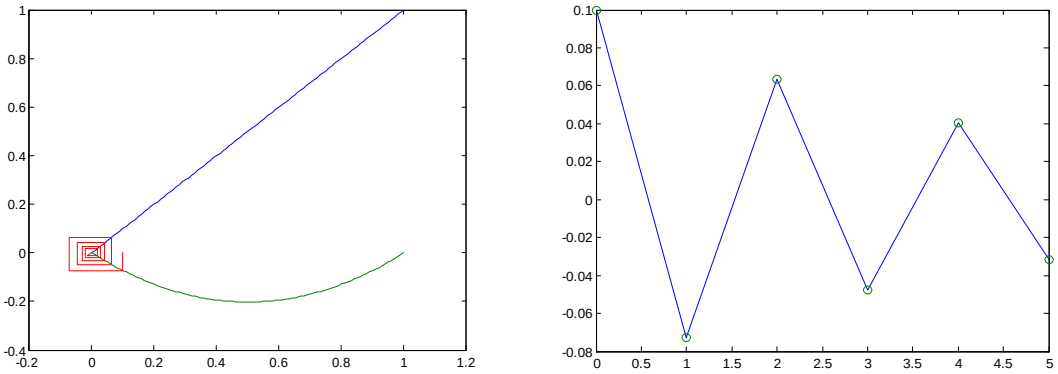


Figura 3.19 Ecuria për agrumet nisur nga P_0=1994 dhe $t_1 = 2$.
..... *Burimi: Përpunime të autorit*

Rasti 2

Në këtë rast vlerësimi për $r = -0.2426, t_1 = 3$, del që në vitet e para vihet re një paqëndrueshmëri, e cila stabilizohet pas tre hapave.

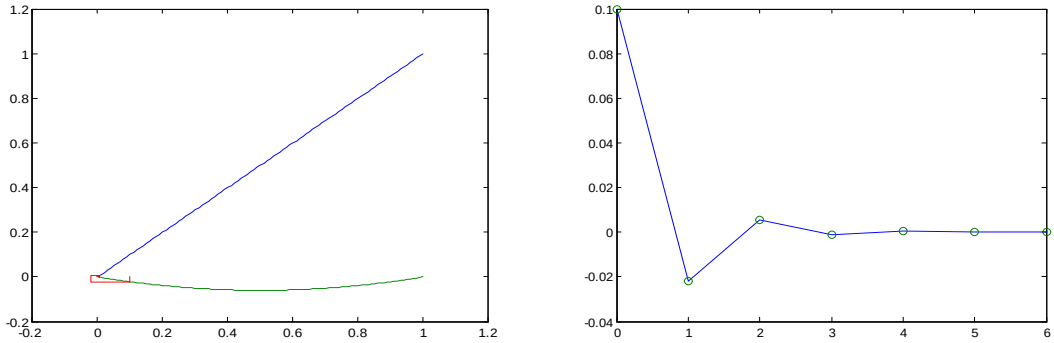


Figura 3.20 Ecuria për agrumet nisur nga P_0=1994 dhe $t_1 = 3$
Burimi: Përpunime të autorit

Në rastet 3 dhe 4 është studiuar qëndrueshmëria për intervalet kohore $t_1 = 2$ dhe $t_1 = 3$ duke u nisur nga viti 2006.

Rasti 3, $r = 0.4716, t_1 = 2, t = 2006.$

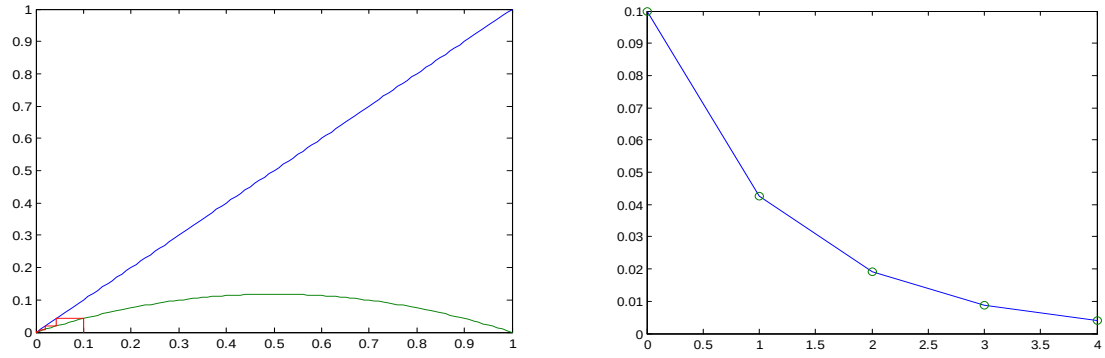


Figura 3.21 Ecuria për agrumet nisur nga P_0=2006 dhe $t_1 = 2$.

Rasti 4, $r = 0.5486, t_1 = 3, t = 2006.$

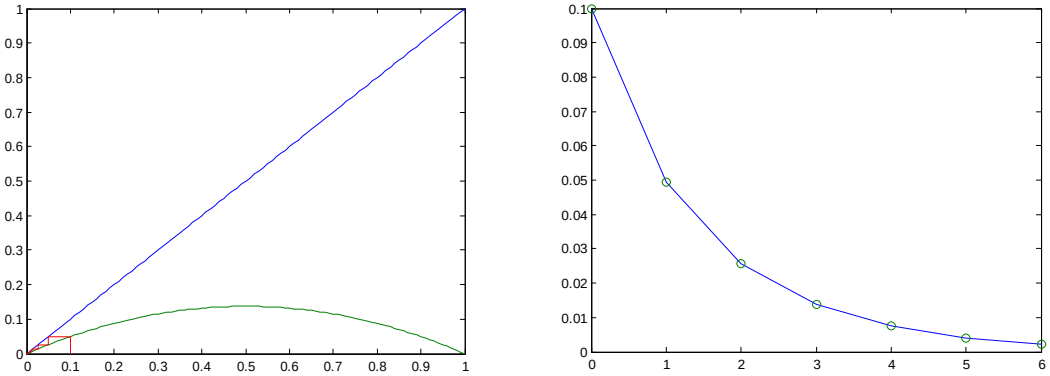


Figura 3.22 Ecuria për agrumet nisur nga P_0=2006 dhe $t_1 = 3$.
Burimi: Përpunime të autorit

Për kulturën e **grurit** duke shfrytëzuar të dhënat nga viti 2004-2012 dhe duke përdorur intervale kohore të barabarta, përkatësisht $t_1 = 2, t_1 = 3, t_1 = 4$, përfohen koeficientët e rritjes dhe vlerat maksimale si në tabelën e mëposhtme:

Tabela 3.8 Koeficientët ***r*** dhe *M* për intervale të ndryshëm kohorë**.**

t1	**2**	**3**	**4**
r	-0.1392	-0.1322	0.3541
M	248.9395	283.537	10317

Burimi: Përpunime të autorit

Rasti 1

Në grafikun e mëposhtëm është paraqitur modelit cobweb me rezultate nga viti 2004-2008, duke përdorur intervale kohore $t_1 = 2$, koeficienti i rritjes është $r = 0.1983$, nisur nga $x_0 = 1.8196$.

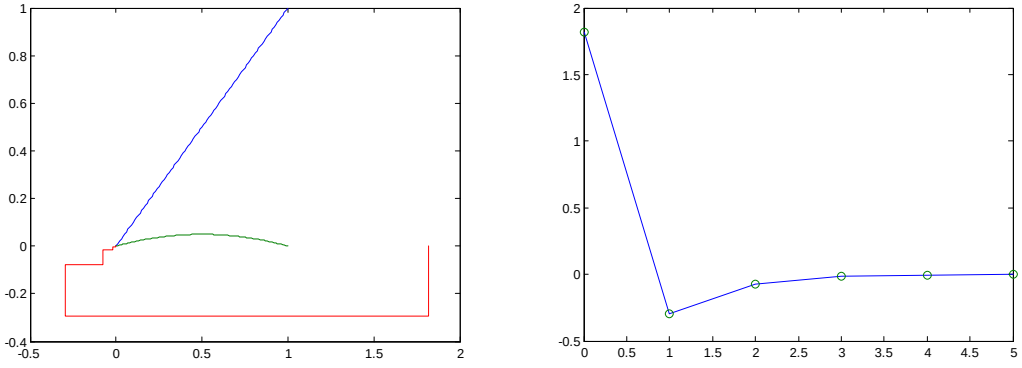


Figura 3.23 Ecuria për grurin nisur nga P_0=20044 dhe $t_1 = 2$

Rasti 2

Ky është zbatimi i modelit cobweb me rezultate nga viti 2004-2010, duke përdorur intervale kohore $t_1 = 3$, koeficienti i rritjes është $r = -0.4154$, nisur nga $x_0 = 0.8286$. Siç duket nga grafiku në vitet e para të intervalit të shqyrtuar nuk ka qëndrueshmëri, pas vitit 2008 modeli është i qëndrueshëm.

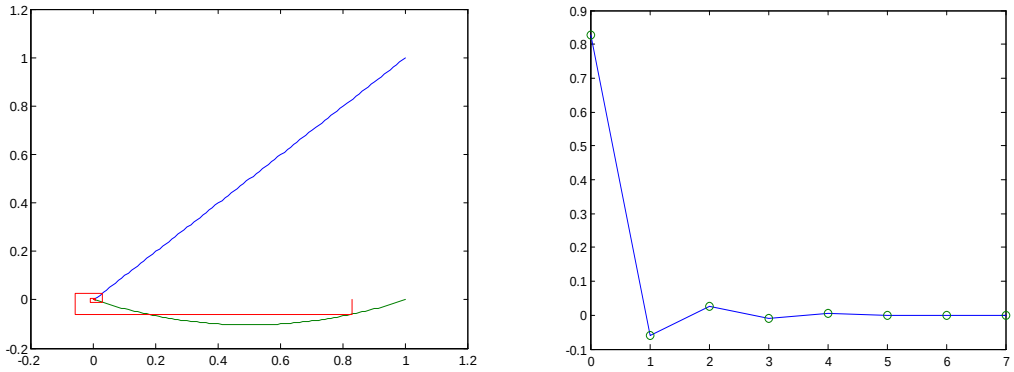


Figura 3.24 Ecuria për grurin nisur nga P_0=2004 dhe $t_1 = 3$.

Rasti 3

Ky është zbatimi i modelit cobweb me rezultate nga viti 2004-2012, duke përdorur intervale kohore $t_1 = 4$, koeficienti i rritjes është$r = -0.1981$, nisur nga $x_0 = 0.6294$. Në këtë rast studiohet një interval kohor më i gjerë dhe vihet re se gjendja e qëndrueshme arrihet në dy iteracionet e para.

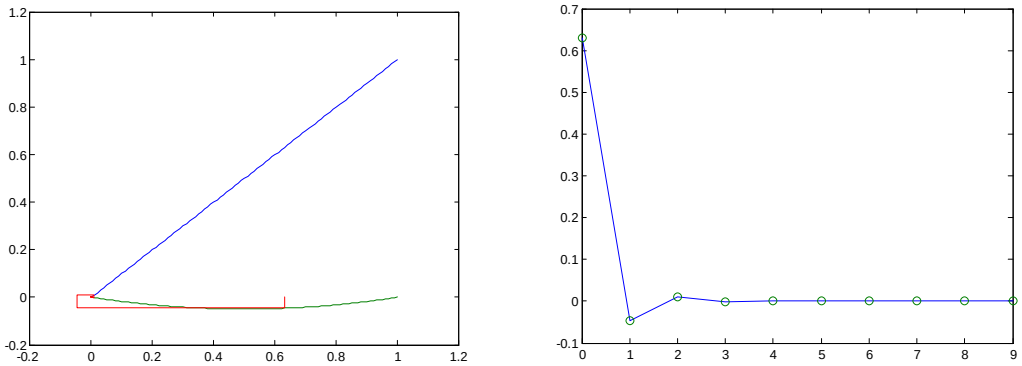


Figura 3.25 Ecuria për grurin nisur nga P_0=2004 dhe $t_1 = 3$.
Burimi: Përpunime të autorit

Në dy grafikët e mëposhtëm jemi nisur nga të dhënat e vitit 2004 për dy intervale të ndryshme kohore, $t_1 = 2$ dhe $t_1 = 3$, rrjedhimisht do të kemi koeficietë rritjeje të ndryshëm si të paraqitur në Tabelën 3.7, por në këtë rast kemi shtuar edhe parashikueshmërinë, pra kemi parashikuar se çfarë ecurie do të ketë për këtë produkt deri në vitin 2014. Nëse duam parashikime më afatgjata në algoritmin tonë mjafton të shtojmë internalin kohor, dhe ***përparësia*** e kësaj metode krahasur me teknika të tjera parashikuese është se metoda paraprakisht studion qëndrueshmërinë dhe nëse kjo është e garantuar atëherë rezultatet e përftuara do të jenë më të besueshme.

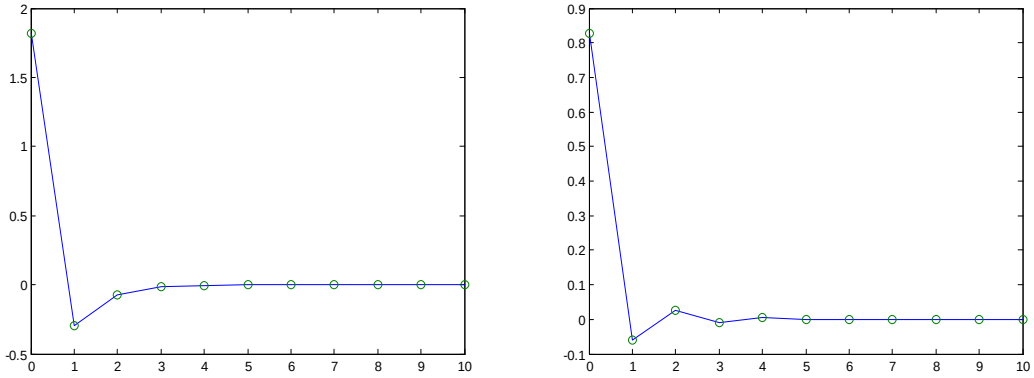


Figura 3.26 Ecuria për grurin në intervalin kohor **2004-2014** (P_0=2004), për $t_1 = 2$, $t_1 = 3$.
Burimi: Përpunime të autorit

Siç shihet edhe nga grafikët ka një qëndrueshmëri për periudhën para parashikimit dhe kjo bën që edhe parashikimi të jetë i mirë. Vlerat e sakta (rreshti i parë) dhe të parashikuara (rreshti i dytë) të çmimeve të grurit që lidhen me paraqitjet grafike të dhëna në figurën e mësipërme.

Tabela 3.9 Çmimet e grurit në vite dhe vlerat e parashikuara nga modeli cobweb.

Viti	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Çmimi	32	31	27	31	45	37	39	36	-	-	-	-	-
Çmimi(p)	32	33.9	29.8	35	35.1	37.08	37.56	32.01	32.5	32.95	33.02	33.1	33.23

Burimi: Përpunime të autorit

Grafikët për produktet misër, grurë dhe patate paraqiten tek aneksi C i Shtojcës.

Duke shqyrtuar me vëmendje të gjithë produktet vihet re se qëndrueshmëria më e mirë është për grurin, dhe ky fakt justifikohet pasi ky është një produkt për të cilin në vendin tonë nuk është importuar shumë dhe ndërhyrjet me politika të ndryshme, si ulje apo heqje të menjëhershme të taksave doganore nuk janë vërejtur.

Për shembull për agrumet shpesh në mënyra krejt drastike janë hequr taksat doganore e cila çon në një joqëndrueshmëri në tregun e këtij produkti.

Parashikimet janë të nevojshme për të planifikuar, për të marrë vendime, për të kuptuar dhe për të implementuar zgjedhje prospektive.

PËRFUNDIME

Në këtë punim është trajtuar qëndrueshmëria e zgjidhjes ekuacioneve me diferenca dhe zbatime në ekonomi të rasteve lineare dhe jolineare të modelit cobweb duke treguar përparësinë e pëdorimit të modeleve jolineare.

Duke përdorur të dhëna reale është paraqitur një model jolinear dhe është studiuar qëndrueshmëria e tij. Në rastet kur ai arrin një pikë ekuilibri mund të përdoret për të bërë përafrime për vitet e mëvonshme.

Ka shumë metoda të tjera numerike apo statistikore me anë të të cilave mund të bëhen përafrime, por avantazhi i kësaj metode është se me anë të modelit cobweb duke përdorur të dhëna të viteve të mëparshme, studjohet qëndrueshmëria e tij dhe nëse ky model rezulton i qëndrueshëm, atëherë mund të përdoret për të bërë përafrime ose parashikime të mëtejshme.

Një kufizueshmëri në trajtimin e bërë do të ishte nëse do të përdorej vetëm modeli linear, pasi përgjithësisht proceset reale janë jolineare dhe kjo është arsyeja pse jemi fokusuar në ndërtimin e një modeli jolinear cobweb, i cili matematikisht paraqet më shumë vështirësi në zgjidhje, por është më i besueshëm.

Pjesa eksperimentale e punës është bërë në Matlab, dhe SPSS. Duhet theksuar që në Matlab kodet janë shkruar për modelin konkret dhe nuk janë përdorur modele apo M-File të gatshme që ofron Matlab-i dhe paraprakisht ato janë testuar me të dhëna test Gonze (2013), Ramos (2013) për tu siguruar për vlefshmërinë e tij.

Rezultatet që janë përftuar nuk janë rezultate që kapin vlerat ideale të kushteve të qëndrueshmërisë, por ato janë të justifikuara nga fakti se pavarërisht se burimi i përftimit të këtyre të dhënave është bërë nga institucione zyrtare, ato nuk shprehin saktësisht gjendjen reale të tregut shqiptar dhe faktin që bujqësia është sektori ku ndryshimet kanë qenë kryesisht rastësore, kaotike dhe nuk ka pasur vëmendjen e duhur para viteve 2000, për të ndërtuar politika mbështetëse ose këto kanë qenë të pamjaftueshme.

Kontributet dhe kufizime të punimit

Ky punim konfirmon avantazhin e përdorimit të modeleve jolineare kundrejt atyre lineare dhe ndihmon në formimin e një këndvështrimi të ri të problemeve të ekuilibrit të tregut.

Modelimi i tregjeve me pritshmëri heterogjene për të stjuduar ekuilibrin e tyre është një mundësi më shumë për provuar sjelljen e modeleve, testimin dhe përzgjedhjen e modelit më të mirë.

Përqasja e bërë në teorinë e qëndrueshmërisë së zgjidhjes së ekuacioneve me diferenca ndihmon për t'u thelluar në studimin dinamikave jolineare në ekonomi. Në shumë vende, pranë universiteteve është krijuar Qendra për Dinamikën Jolineare në Ekonomiks dhe Financë e cila bën kërkime në këto fusha.

Sot ekzistojnë evidenca Boussard,Gerard, (1994), që tregojnë lidhjen pozitive midis stabilitetit të çmimeve dhe rritjes së prodhimit, prandaj studime të mëtejshme duhen që për sektorin e bujqësisë të ndërtohen politika ekonomike mbështetëse dhe integruese në tregun e Bashkimit Evropian.

Punimi ka kufizimet e veta dhe një kufizim i tillë vjen se të dhënat e grumbulluara kanë një përqindje të konsiderueshme informaliteti. Studimi me të dhëna reale mund të shtrihej në tregun e pasurive të patundshme, por gjetja e të dhënave nuk ishte plotësisht e mundur dhe informaliteti në këtë treg ka qenë dukshëm më i lartë.

Përdorimi i eksperimentit ekonomik është pjesë e rëndësishme e studimeve ekonomike, megjithatë përdorimi i tij si metodë në vetvete ka kufizimet e veta. Matamatika ofron mundësi të pafundme në dinamikën jolineare dhe efektet e studimeve janë domethënëse në ndërtimin e projeksioneve ekonomike.

Studimi i së ardhmes

Rianalizimi me të dhëna reale në tregun e pasurive të patundshme mund të shoqërohet me zhvillimin e një eksperimenti, bazuar në studimet e fundit 2013 duke përdorur model i cili tregon se heterogjeniteti është vendimtar në pritshmëritë individuale për çmimet në tregun e shitjes së aseteve.

Testimi i efektivitetit të përdorimit të modelit cobweb “buffer stock” i cili:

- Krijon mundësinë e stabilitetit të çmimeve.
- Rrit besueshmërinë për investime në agrobiznes.

Studimet mund të shtrihen në çdo fushë ku modelet dinamike jolineare cobweb janë të zbatueshëm, pasi matematika e krijon këtë mundësi.

REFERENCA

[1] Agarwal, R.P. *Difference Equations and Inequalities (2000), first ed.*, Marcel Dekker, New York.

[2] Alchian, A.A. (1950), Uncertainty, evolution, and economic theory, *Journal of Political Economy* 58, 211-221.

[3] Amavilah V. H., (2007), Innovations spread more like wildfires than like infections, Munich Personal RePEc Archive Retrieved from http://mpra.ub.unimuenchen.de.

[4] Anderson, S., de Palma, A. and Thisse, J., (1993), Discrete choice theory of product differentiation, *MIT Press*, Cambridge.

[5] Anokye M., Oduro F., (2013), Cobweb with buffer stock for the stabilization of tomato prices in Ghana, *Journal of Management nad Sustainability*, Vol. 3 No. 1.

[6] Arifovic, J. (1994) Genetic algorithm learning and the cobweb model. *Journal of Economic Dynamics and Control* 18, 3–28.

[7] Arthur, W.B., Holland, J.H., LeBaron, B., Palmer, R. and Taylor, P., (1997) Asset pricing under endogenous expectations in an artificial stock market, in Arthur, W., Lanw, D. and Durlauf, S., (eds.) *The economy as an evolving complex system II*, Addison-Wesley.

[8] Baak, S.J. (1999), Tests for bounded rationality with a linear dynamic model distorted by heterogeneous expectations, *Journal of Economic Dynamics and Control 23*, 1517-1543.

[9] Bärbel Finkenstädt, Peter Kuhbier (1992), Chaotic dynamics in agricultural markets *Springer Volume 37, Issue 1*, pp 73-96.

[10] Bohner M., Warth H., (2008) Logistic dynamic equations in population models, Missouri University of Science and Technology.

[11] Boussard, J.M., and F. Gérard (1994): Stabilisation des prix et offre agricole in: *Economics ofagricultural policies in developing countries,* M. Benoit-cattin, M. Griffon et P. Guillaumonteds., éditions de la RFSP, Paris, 1995.

[12] Bray, M. M. and N.E. Savin (1986) Rational expectations equilibria, learning and model specification. *Econometrica 54*, 1129–1160.

[13] Brock, W.A. and LeBaron, (1996), A structural model for stock return volatility and trading volume, *Review of Economics and Statistics 78*, 94-110.

[14] Brock, W.A. and C.H. Hommes (1997) A rational route to randomness. *Econometrica 65*, 1059–1095.

[15] Brock, W.A., Hommes, C.H., and Wagener, F.O.O. (2004), Evolutionary dynamics in markets with many trader types, *Journal of Mathematical Economics*.

[16] Carl D. Meyer (2000), Matrix analysis and applied linear algebra, *SIAM*, Philadelphia.

[17] Chavas, J.P., (2000) On information and market dynamics: The case of the U.S. beef market, *Journal of Economic Dynamics and Control, 24*, 833-853.

[18] Chiarella C., (1988), The cobweb model, its instability and the onset of chaos, *Economic Modeling, vol. 5*, no.4, p. 377-384.

[19] Chiarella, C., He, T. (2000), Heterogeneous beliefs, risk and learning in a simple asset pricing model, *Computational Economics*.

[20] Chiarella, C., X. Z. He, (2001), Asset Price and Wealth Dynamics under Heterogeneous Expectations. *Papwr presented at the second CeNDEF Workshop on Economic Dynamics*, University of Amsterdam, January 4–6.

[21] Coddngton,E.A, N.Levinson (1995), Theory of Ordinary Differential Equations. New York*: McGraw-Hill.*

[22] Dannan, F., and S. Elaydi, (2004). Asymptotic stability of linear difference equations of advanced type, J.Comput. Anal. Appl. 6(2).

[23] De Grauwe, P., DeWachter, H. and Embrechts, M., (1993) Exchange rate theory.Chaotic models of foreign exchange markets, *Blackwell.*

[24] De Long, J.B., Shleifer, A., Summers,L.H. and waldmann, R.J., (1990) Positive feedback investment strategies and destabilizing rational speculation, *Journal of Finance 45*, 379-395.

[25] De Fontnouvelle, P., (2000), Information dynamics in financial markets, *Macroeconomic Dynamics 4*, 139-169.

[26] Durlauf, S. N., Kourtellos A., Minkin A., (2001), "The local Solow growth model," *European Economics Review Vol. 45*, No 4–6, pp 928–940.

[27] Elaydi, S. (2005), An Introduction to Difference Equations, *Springer*,

[28] Farmer, J.D. and Joshi, S., (2002), The price dynamics of common trading strategies, *Journal of Economic Behaviour and Organization 49*, 149-171.

[29] Finkenstadt, B., (1995), Nonlinear Dynamics in Economics: A theoretical and Statistical Approach to Agricultural Markets, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, no.426*, Springer, Berlin, Germany.

[30] Franke, R. and T. Nwseman (1999) Two destabilizing strategies may be jointly stabilizing. *Journal of Economics* 69(1), 1–18.

[31] Friedman, M., (1953) The case of flexible exchange rates, In: Essays in positive economics, *Univ. Chicago Press.*

[32] Giancarlo Gandolfo, "Economic dynamics: Methods and Models," *North-Holland Publishing Company*, New-York, 1979.

[33] Goodwin, R. M. (1947) Dynamic coupling with especial reference to markets having production lags, *Econometrica, 15*, 181-204.

[34] Goeree, J.K. and C.H. Hommes (2000) Heterogeneous beliefs and the non-linear cobweb model.

[35] *Journal of Economic Dynamics and Control* 24, 761–798.

[36] Gonze, G., The logistic equation, *Belgium*, October 2013.

[37] Guesnerie, R. (2002) Anchoring economic predictions in common knowledge. *Econometrica 70*, 439–480.

[38] Griffiths D.F., Christie I., Mitchell A.R. (1980). Analysis of error growth for explicit difference schemes in conduction-convection problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering, v15* n7 July, 1075-1081

[39] Holt, C.A. and A.P. Villamil (1986) A laboratory experiment with a single person cobweb. *Atlantic Economic Journal 14*, 51–54.

[40] Hommes, C. H., Dynamics of the cobweb model with adaptive expectations and nonlinear supply and demand, *Journal of Economic Behaviour & Organization, vol.24*, n0.3, p.315-335, 1994.

[41] Hommes, C.H. and G. Sorger (1998) Consistent expectations equilibria. *Macroeconomic Dynamics 2*, 287–321.

[42] Hommes, C.H., J. Sonnemans and H. van de Velden (2000) Expectation formation in an experimental cobweb economy. In D. Delli Gatti, M. Gallegati and A. Kirman (eds.).

Interaction and Market Structure: Essays on Heterogeneity in Economics. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, volume 484*, pp. 253–266. Berlin: Springer-Verlag.

[43] Hommes, C.H. (2000) Cobweb dynamics under bounded rationality. In E.J. Dockner et al. (eds.).

[44] *Optimization, Dynamics, and Economic Analysis—Essays in Honor of Gustav Feichtinger*,
[45] pp. 134–150. Berlin: Physiça-Verlag.

[46] Hommes,C.,Sonnemans,J.,Tuinstra,J.,vandeVelden,H., (2007), Learning in cobweb experiments, *Macoeconomic Dynamics 11* (S1),8–33.

[47] Hommes, Cars, 2011. "The heterogeneous expectations hypothesis: Some evidence from the lab," *Journal of Economic Dynamics and Control, Elsevier, vol. 35(1)*, pages 1-24, January.

[48] Hommes, C., (2013), Behavioral Rationality and Heterogeneous Expectations in Complex Economic Systems.*CISM Springer* Book.

[49] Kahneman, D. (2003), Maps of bounded rationality: Psychology for behavioral economics, *American Economic Review 93*, 1449-1475.

[50] Kailath, T. (1980).Linear Systems, *Prentice-Hall, Engelwood Cliffs, NJ*.

[51] Keynes, J.M. (1936). The general theory of unemployment, interest and money, Harcourt, Brace and World, New York.

[52] Kelley, W.G. and A.C. Peterson (1991). Difference Equations, An Introduction with Applications, *Academic Press*, New York.

[53] Klaus Neusser. (2008,October 21). Difference Equations for Economists [Online] Available: http://www.vul.unibe.ch/studies/3107_e/DifferenceEquations.pdf.

[54] Kocic, V L, Ladas, G. (1993). Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht.

[55] Komisioni Evropian,*Raporti mbi Shqiperinë 2007*,Bruksel.

[56] Kulenovic,M.R.S.and G.Ladas (2003).Dynamics of Second-Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjwctures. *Chapman & Hall/CRC Press*,Boca R., FL.

[57] Lackman C. L., Logit forecasting of high tech products. Retrived from http://www.allbusiness.com/.

[58] Lasselle, L., S. Svizzero, and C. Tisdell (2004). Stability and cycles in cobweb model with Heterogeneous Expectations. *EUI Working paper ECO No. 2004*/3.

[59] Lasselle, L., S. Svizzero, and C. Tisdell (2005). Stability and cycles in cobweb model with Heterogeneous Expectations. *Macroeconomic Dynamics*, 9, 2005, 630–650, University of St. Andrews.

[60] Le Baron, B. (2000). Agent based computational finance: suggested readings and early research. *Journal of Economic Dynamics and Control 24*, 679-702.

[61] Levy, H.and F. Lessman (1961). Finite Difference Equations. *Macmillan*.

[62] Lucas, R.E. (1986). Adaptive behavior and economic theory. *Journal of Business 59* (4), S401–S426.

[63] Lucas, R.E. (1971). Econometric testing of the natural rate hypothesis, In: O. Eckstein (ed.) The econometrics of price determination Conference. Board of Governors of the Federal Reserve System and Social Science Research Council.

[64] Lux, T. and Marchesi, M. (2000). Volatility clustering in financial markets: a microsimulation of interacting agents, *I nternational Journal of Theoretical and Applied Finance, 3*, 675–702.

[65] Matsumoto A. (1999). Preferable disequilibrum in a nonlinear cobweb economy. *Annals of Operations Research, vol.89*, p.101-123.

[66] Ma, J., Mu, L. (2007). Complex dynamics in a nonlinear cobweb model for real estate market. *Discrete Dynamics in Nature and Society, art. ID. 29207.*

[67] Mickens, R. E. (1990). Difference Equations: Theory and Applications. *Chapman and Hall*.

[68] Mickens, R. E. (1987). Difference Equations, *Van Nostrand Reinhold*.

[69] Ministria e Bujqësisë,Ushqimit dhe Mbrojtjes së Konsumatorit: Vjetari statistikor. *Instituti i Statistikave*: www.instat.gov.al.

[70] Moore H. (1914). Economic cycles: Their law and cause. *MacMillan*, New York.

[71] Moore, H. L. (1925), Moving Equilibrium of Demand and Supply, *Quarterly Journal of Economics, 34*, 357-71.

[72] Mordecai Ezekiel. (1938) The cobweb theorem, *The Quarterly Journal of Economics Vol.52,* pp. 255–280, February.

[73] Mulla,P. (2012). Modelimi matematik i disa problemeve dhe stabiliteti i tyre:Modeli Cobweb. *Albanian Socio Economik Review* Viti XVIII,Nr.2(71)Prill-Qershor, ISSN 2222-5846.

[74] Mulla, P. (2012), Përdorimi i ekuacioneve të diferencës në modelimin e disa problemeve në ekonomi. *Albanian Socio Economik Review* Viti XVIII, Nr.4 (73), ISSN 2222-5846.

[75] Mulla, P.,Kalluçi (Xhaja),E.,Hoxha, F.(2014). The numerical simulation of nonlinear cobweb model in MATLAB. *The Albanian Journal of Natural and Technical Sciences* Nr 36(1).

[76] Mulla , P. Vegetable price fluctuation in Albania: A nonlinear model for its study. *Mediterranean Journal of Social Sciences" Vol.5,No.2 January 2014,* 477-482.

[77] Muth, J.F. (1961) Rational expectations and the theory of price movements, *Econometrica 29*, 315-335.

[78] Nerlove, Marc (1958). Adaptive Expectations and Cobweb Phenomenon. *Quarterly Journal of Economics, 72*, 227-240.

[79] Oded Galor. (2007). Discrete dynamical systems. *Springer*, Berlin.

[80] Ortega, J.M. (1987). Matrix Theory, A Second Course, *Plenum*, New York.

[81] Paul Champsaur, Jacques Drèze, Claude Henry. (1997). Stability Theorems with Economic Applications. *Econometrica, Vol. 45*, No. 2.

[82] Patula, W.T. (1979). Growth and oscillation properties of second-order linear difference equations, *SIAM J. Math.Anal.* 19 55–61.

[83] Puu, T. (2000). Atractors Bifurcations and Chaos: Nonlinear Phenomena in Economics, *Springer*, Berlin, Germany.

[84] Quarteroni A., Valli A. (1994): "Numerical approximation of partial dierential equations"

[85] Ramos, R. A. (2013). Logistic function as a forecasting model: It's application to business and economics, *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, Vol.2, No.3, March.

[86] Ravi, P., Agarwal, Ahmed MA El-Sayed, Sanaa M Salman (2013). Fractional-order Chua's system: discretization,bifurcation and chaos. *Advances in Difference Equations.*

[87] Reddy, S.C., Trefethen L.N. (1990): "Lax-stability of fully discrete spectral methods via stability regions and pseudo-eigenvalues".

[88] Ricci, U.(1930). Die "Synthetische Okonomie" von Henry Ludwell Moore. *Zeitschrift fuir Nationalokonomie, Wien, Band 1, Heft 5*, p. 656.

[89] Robbin, J. W. (1971). A Structural Stability Theorem. *The Annals of Mathematics, Vol. 94*, No. 3, pp 447-493, November.

[90] Roberto Dieci, Frank Westerhoff (2009). Stability analysis of a cobweb model with market interactions. *Applied Mathematics and Computation Vol 215*, No 6, Pages 2011–2023, November .

[91] Sargent, T.J., (1993). Bounded rationality in macroeconomics, *Clarendon Press*, Oxford.

[92] Sedaghat, H. (2003). Nonlinear difference equations, in Theory with Applications to Social Science Models, *Kluwer Academic*, Dordrecht.

[93] Simon, H.A. (1979). Rational decision making in business organizations, *American Economic Review 69*, 493-513.

[94] Smith, H., Planar competitive and cooperative difference equations, *J.Difference Equ. Appl. 3* (1998), 335–357.

[95] Shone, R. (2002). Economic Dynamics, *CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS*, New York.

[96] Solow R. M. (1956). A contribution to the theory of economic growth, *Quarterly Journal of Economics 70* no. 1, 65–94.

[97] Suoping, L., Linong, W. (2006). Analysis of China Vegetables Supply on the Price of Reaction. *Journal of Agro-technical Economics.* (5):59-62.

[98] Strikwerda J.C. (1989). Finite difference schemes and partial diferential equations.

[99] Taylor John B. (1980). Aggregate demand and staggered contracts, *Journal of Political Economy 88*, 1–23.

[100] Tversky, A. and Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: heuristics and biases, *Science 185*, 1124-1131.

[101] Tiryaki,A., Misir,A. (2008). Reducibility and Stability Results for Linear System of Difference Equations. *Advances in Difference Equations*, Article ID 867635.

[102] Thomas, J.W. (1995). Numerical partial differential equations: "*Finite difference methods*"

[103] Ximing Z. (1997). The Rising Vegetable Prices and Its Comprehensive Management China Price. (4):19-20.

[104] Woodford Michael. (2003). Interest and Prices: Foundations of a Theory of Monetary Policy, Princeton *University Press, Princeton*, New Jersey.

[105] Weisstein, E. W. (2009). Logistic equation, MathWorld—A Wolfram *Web Resource*.

SHTOJCA

A. Tabelat dhe rezultatet për disa produkte bujqësore të rrethit të Sarandës

viti	Agrumet		Patatet		Domatet		Misri		Gruri	
	MES vj	prodh. vj	MES vj	prodh. vj	MES vj	prodh. vj	MES vj	prodh. vj	MES vj	prodh. vj
1993										
1994	49.5	980	35.1		75.8	740				
1995	52.9	1590	39.4	817	69.5	890	27.0	2600	30.6	2600
1996	67.8	2000	38.8	569	94.6	950	30.4	2660	29.0	2660
1997	85	794		504	115	1046	28	1650	31.5	1650
1998	112.4	320	58	783	119.3	3430	30.7	1935	30.7	1935
1999	120.1	562	61.3	1200	105.3	780	32.5	3500	30.3	1495
2000	89.9	570	50.6	960	111.8	540	34	3870	33	1230
2001	104.3	610	52.6	740	96.3	620	33	4210	32	1720
2002	100	552	48.9	450	111.4	618	32	4400	31	1620
2003	109.1	530	56.3	350	103.3	710	31.2	4550	34	1540
2004	102	490	58	480	108	830	33	5950	32	1170
2005	108	620	54.5	365	104	1025	34.5	2600	31	2600
2006	944.3	711	51	324	94	1050	30	10115	27	494
2007	961.6	759	51.5	297	96	1120	36.0	10708	31.0	821
2008	107.5	1759	36	420	93	1250	46	13570	45	808
2009	113.5	2472	50	505	47	1323	26	16000	37	546
2010	143.5	4129	59	526	115	1363	29	17336	39	403
2011	140.5	4457	63	561	110	1240	34	22250	36	480
2012		4732		841	112	1485	32.5	19227		480

Tabela 1. *Burimi:Drejtoria e Bujqësisë Sarandë*

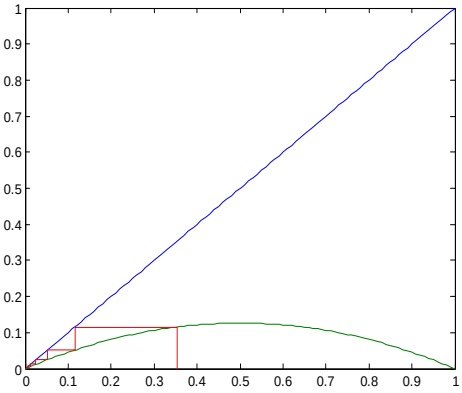
B. Rezultatet e zbatimit të modelit Cobweb për disa produkte bujqësore të rrethit të Sarandës.

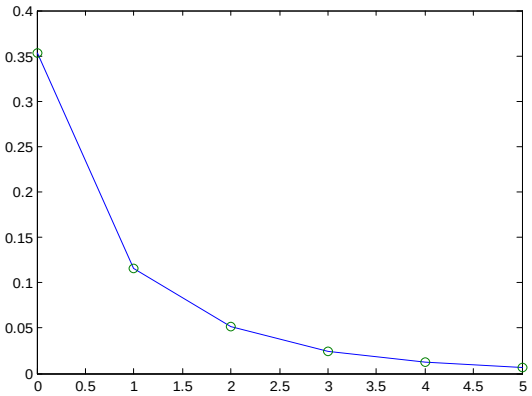
Për kulturën e ***misrit*** duke shfrytëzuar të dhënat nga viti 2004-2012 dhe duke përdorur intervale kohore të barabarta, përkatësisht $t_1 = 2, t_1 = 3, t_1 = 4$, përftohen koeficientët e rritjes dhe vlerat maksimale si në tabelën e mëposhtme:

Tabela 2. Koeficientët***r*** dhe *M* për intervale të ndryshëm kohorë**.**

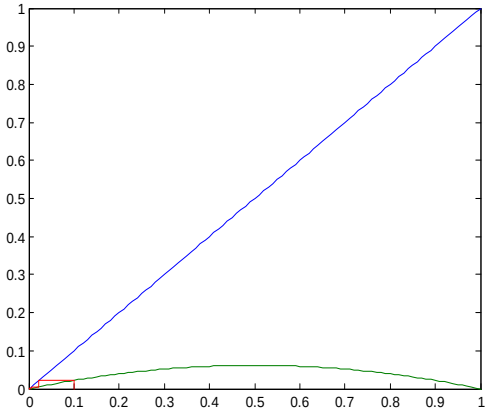
t1	**2**	**3**	**4**
r	0.5057	0.2460	0.3677
M	16863	40041	21957

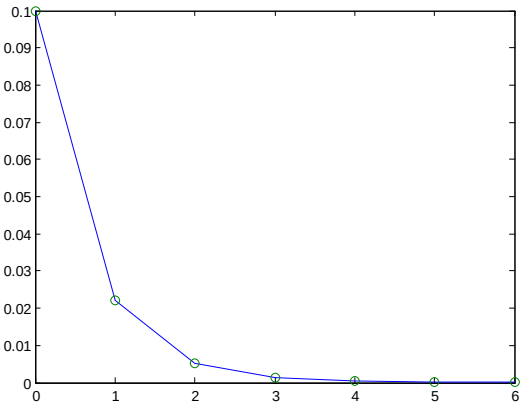
Rasti1



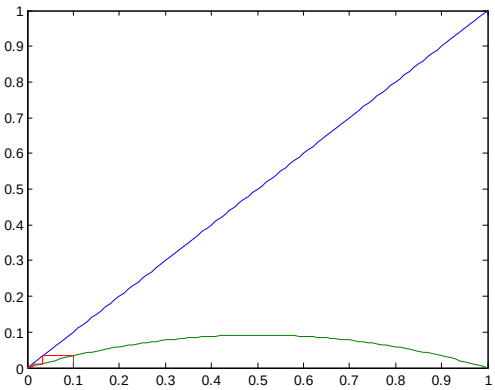


Rasti 2





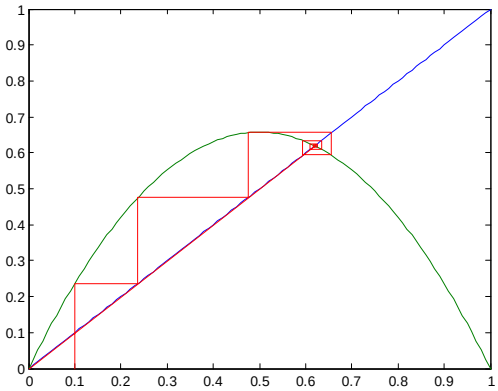
Rasti 3

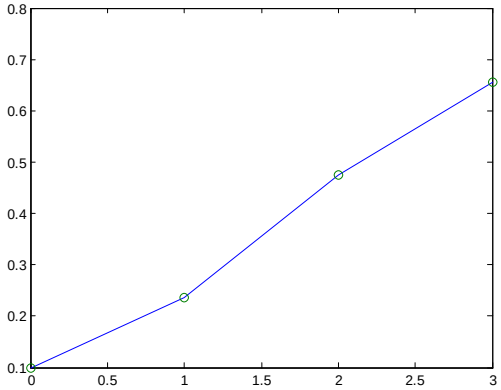


Duke përdorur të dhënat e Tabelës 1 për intervale kohore $t_1 = 2,\ r = 2.63; r = 0.89;$ përftojmë:

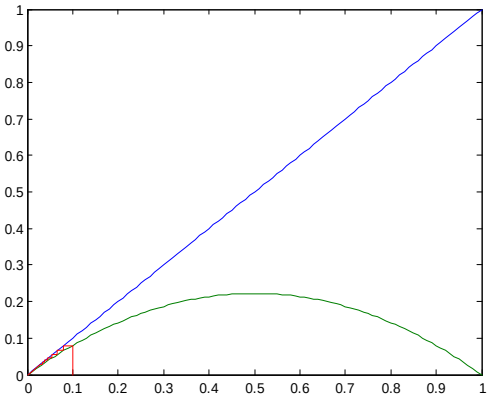
Për domatet:

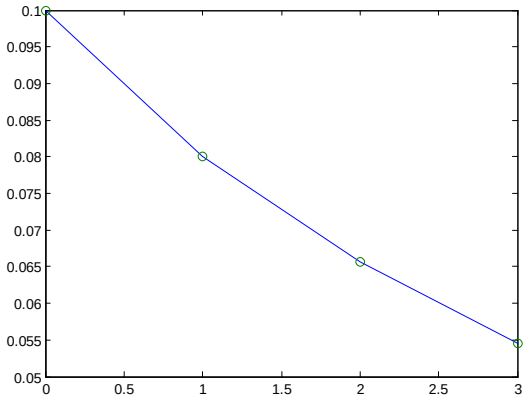
$r = 2.63$





$\boldsymbol{r = 0.89}$





Për kulturën e **patates** duke shfrytëzuar të dhënat nga viti 2004-2012 dhe duke përdorur intervale kohore të barabarta, përkatësisht $t_1 = 2, t_1 = 3, t_1 = 4$, përftohen koeficientët e rritjes dhe vlerat maksimale si në tabelën e mëposhtme:

Tabela 3. Koeficientët ***r*** dhe *M* për intervale të ndryshëm kohorë**.**

t1	**2**	**3**	**4**
r	0.1682	-0.0442	-0.3469
M	371.6129	372.7674	466.6790

C. Testet statistikore për mesataren dhe variancën me të dhënat e eksperimentit në paragrafin 3.1

Testi është një **t**-test i thjeshtë që teston nëse mostra ka mesataren me të cilën ne e krahasojmë. Përfundimet e mëposhtme janë përftuar në SPSS për të tria rastet për 50 periudhat e plota dhe për 25 periudhat e dyta.

Për 50 periudha

Rasti i qëndrueshëm

One-Sample Test

	Test Value = 5.27					
	T	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
Grupi1	-.541	49	.591	-.03751	-.1769	.1019
Grupi2	-.164	49	.870	-.00904	-.1198	.1017
Grupi3	.363	49	.718	.02870	-.1302	.1876
Grupi4	.504	49	.616	.03415	-.1019	.1702

Rasti i paqëndrueshëm

One-Sample Test

	Test Value = 5.58					
	T	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
VAR00008	1.345	49	.185	.12673	-.0627	.3161
VAR00009	1.231	49	.224	.11906	-.0754	.3135
VAR00010	.939	49	.352	.12145	-.1384	.3813
VAR00011	.056	49	.956	.00670	-.2355	.2489

Rasti me paqëndrueshmëri të theksuar

One-Sample Test

	Test Value = 5.86					
	T	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
VAR00001	-.464	49	.645	-.08116	-.4326	.2703
VAR00002	.310	49	.758	.06978	-.3826	.5222
VAR00003	.015	49	.988	.00447	-.5928	.6017
VAR00004	.704	49	.485	.13553	-.2515	.5225

Për 25 periudhat e dyta

Rasti i qëndrueshëm

One-Sample Test

	Test Value = 5.27					
	T	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
Grupi1	.164	24	.871	.01186	-.1378	.1615
Grupi2	-.441	24	.663	-.01875	-.1065	.0690
Grupi3	.431	24	.670	.04500	-.1706	.2606
Grupi4	1.069	24	.296	.08256	-.0769	.2420

Rasti i paqëndruesëm

One-Sample Test

	Test Value = 5.58					
	T	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
Grupi1	.779	24	.444	.07924	-.1308	.2892
Grupi2	.938	24	.357	.11787	-.1414	.3771
Grupi3	.650	24	.522	.09363	-.2037	.3909
Grupi4	.088	24	.930	.01502	-.3363	.3664

Rasti me paqëndrueshmëri të theksuar

One-Sample Test

	Test Value = 5.86					
	T	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
Grupi1	-1.060	24	.300	-.16269	-.4794	.1541
Grupi2	.470	24	.643	.11475	-.3891	.6186
Grupi3	-.378	24	.709	-.13138	-.8486	.5859
Grupi4	.721	24	.478	.19960	-.3718	.7709

Testi për barazinë e variancave

Testi u përftua ne SPSS me testin levene të homogjenitetit të variancave për 50 periudha dhe për 25 periudhat e dyta.

Për 50 periudha

Rasti i qëndrueshëm

Grupi 1

Test of Homogeneity of Variances

Price

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
.484	1	98	.488

Grupi 2

Test of Homogeneity of Variances

Price

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
5.135	1	98	0.026

Grupi 3

Test of Homogeneity of Variances

Price

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
.453	1	98	.502

Grupi 4

Test of Homogeneity of Variances

Price

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
.360	1	98	.550

Rasti i paqëndrueshëm

Grupi 1

Test of Homogeneity of Variances

Price

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
5.760	1	98	.018

Grupi 2

Test of Homogeneity of Variances

Price

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
2.166	1	98	.144

Grupi 3

Test of Homogeneity of Variances

Price

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
10.680	1	98	.001

Grupi 4

Test of Homogeneity of Variances

Price

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
16.307	1	98	.000

Rasti me paqëndrueshmëri të theksuar

Grupi 1

Test of Homogeneity of Variances

Price

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
18.204	1	98	.000

Grupi 2

Test of Homogeneity of Variances

Price

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
40.225	1	98	.000

Grupi 3

Test of Homogeneity of Variances

Price

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
40.225	1	98	.000

Grupi 4

Test of Homogeneity of Variances

Price

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
35.047	1	98	.000

Për 25 periudhat e fundit

Rasti i qëndrueshëm

Grupi 1

Test of Homogeneity of Variances

Price

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
2.644	1	48	.111

Grupi 2

Test of Homogeneity of Variances

Price

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
14.131	1	48	.000

Grupi 3

Test of Homogeneity of Variances

Price

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
.001	1	98	.972

Grupi 4

Test of Homogeneity of Variances

Price

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
2.462	1	98	.123

Rasti i paqëndrueshëm

Grupi 1

Test of Homogeneity of Variances

Price

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
.013	1	48	.909

Grupi 2

Test of Homogeneity of Variances

Price

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
.998	1	48	.323

Grupi 3

Test of Homogeneity of Variances

Price

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
1.617	1	98	.210

Grupi 4

Test of Homogeneity of Variances

Price

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
7.834	1	98	.007

Rasti me paqëndrueshmëri të theksuar

Grupi 1

Test of Homogeneity of Variances

Price

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
1.465	1	48	.232

Grupi 2

Test of Homogeneity of Variances

Price

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
13.192	1	48	.001

Grupi 3

Test of Homogeneity of Variances

Price

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
23.584	1	98	.000

Grupi 4

Test of Homogeneity of Variances

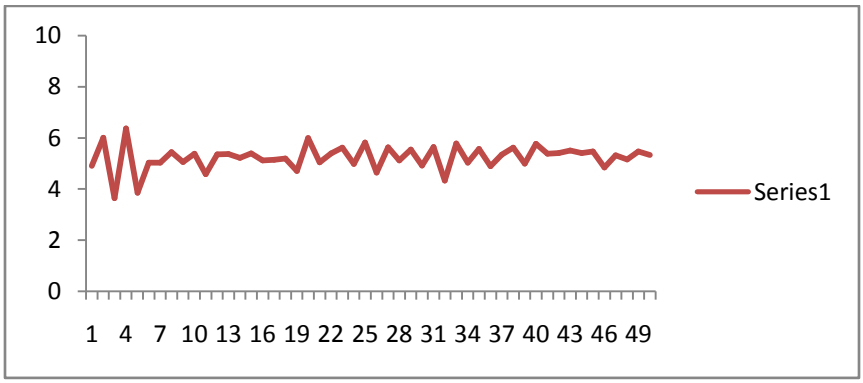
Price

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
14.165	1	98	.000

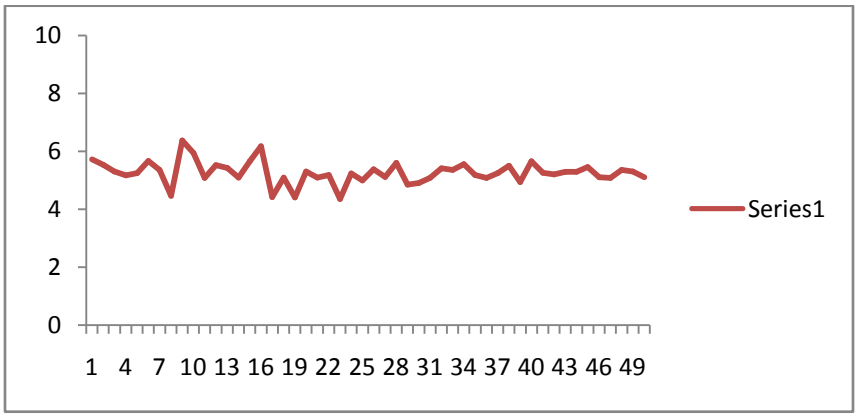
D.Grafikët për të dhënat e eksperimentit të paraqitur në Paragrafin 3.1

Grupi i Parë

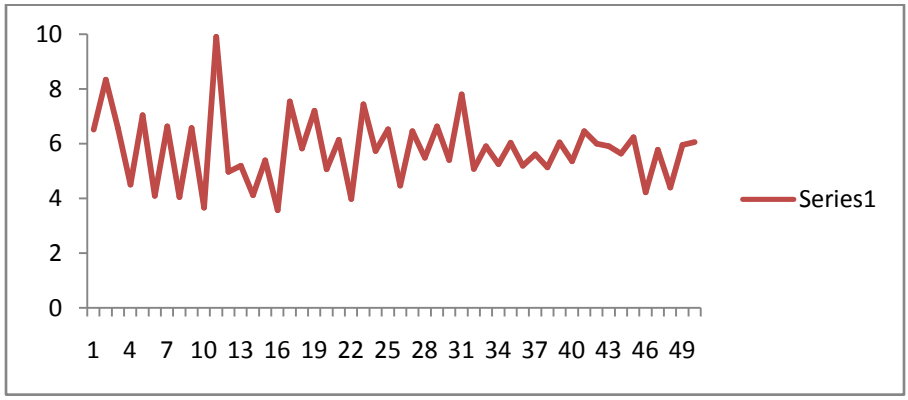
a) Rasti i qëndrueshëm



b) Rasti jo i qëndrueshëm

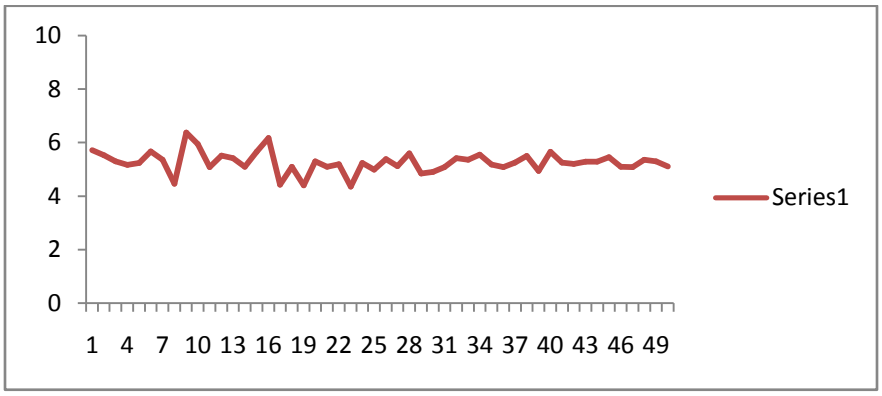


c) Jo qëndrueshmëri e theksuar

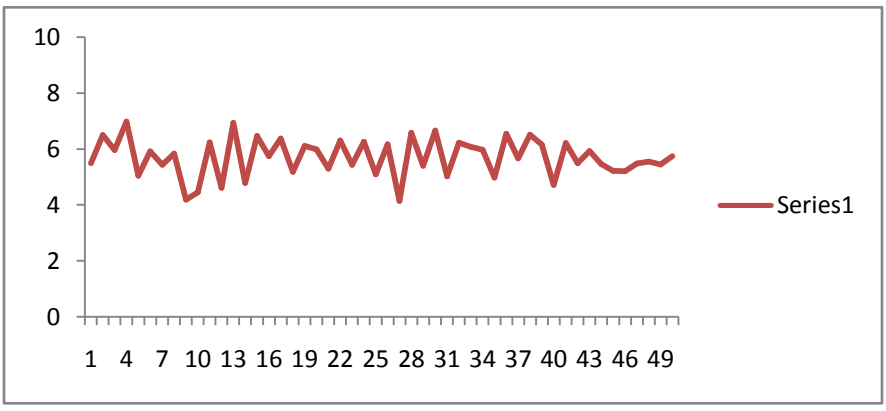


Grupi i Dytë

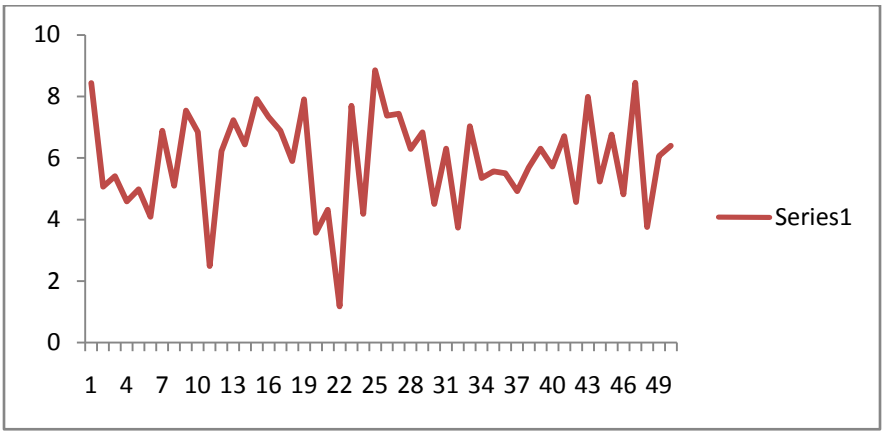
a) Rasti i qëndrueshëm



b) Rasti jo i qëndrueshëm

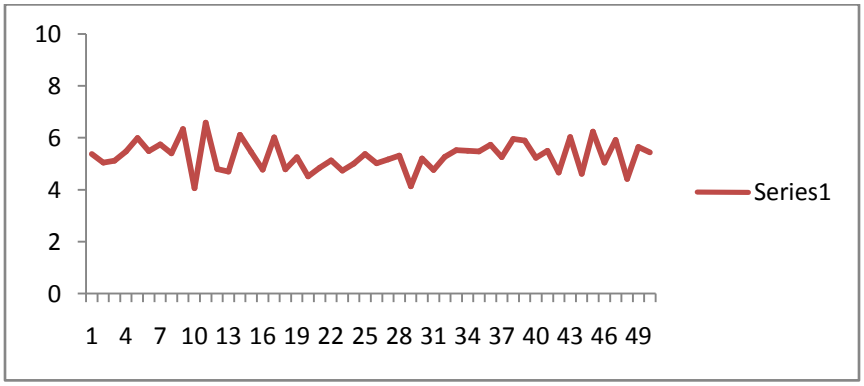


c) Jo qëndrueshmëri e theksuar

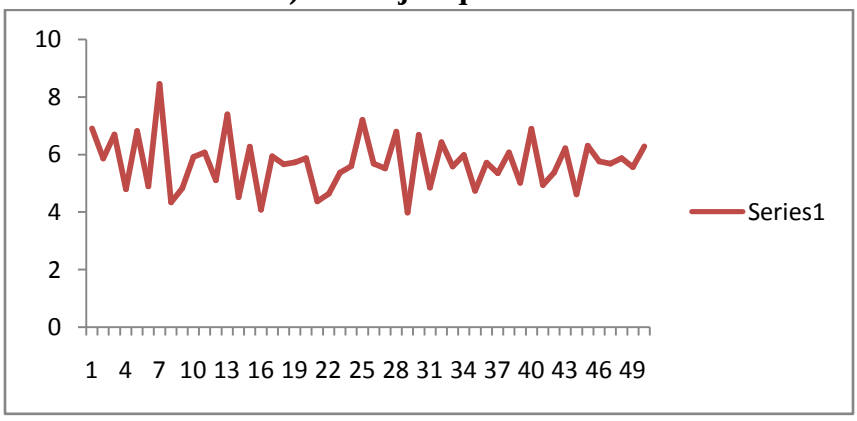


Grupi i tretë

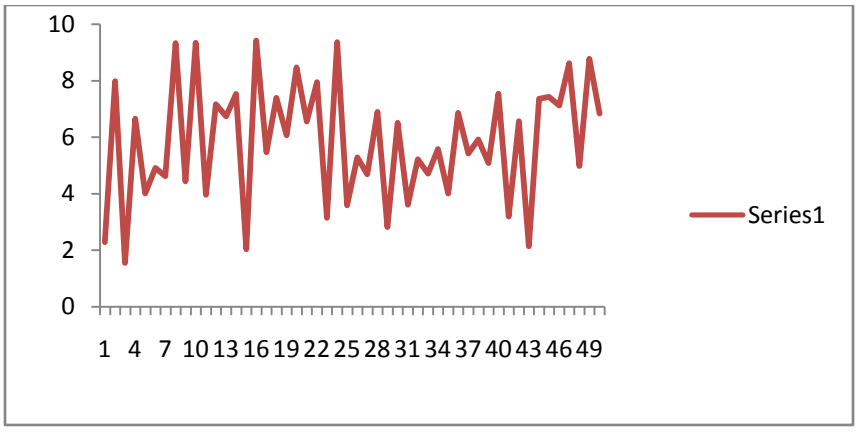
a) Rasti i qëndrueshëm



b) Rasti jo i qëndrueshëm

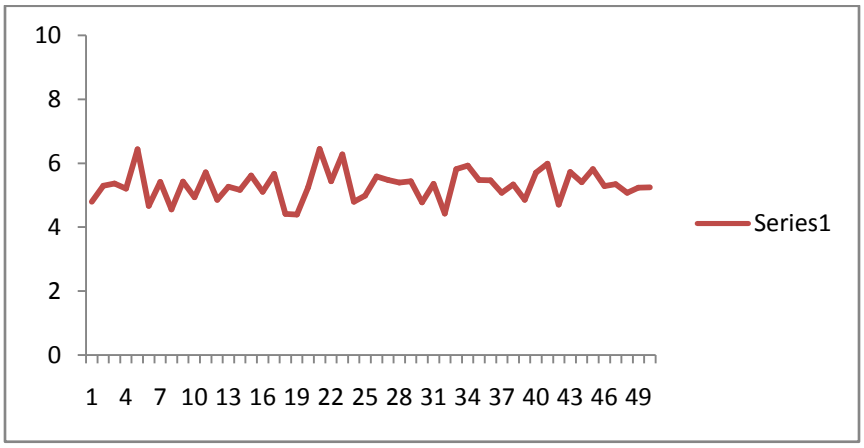


c) Jo qëndrueshmëri e theksuar

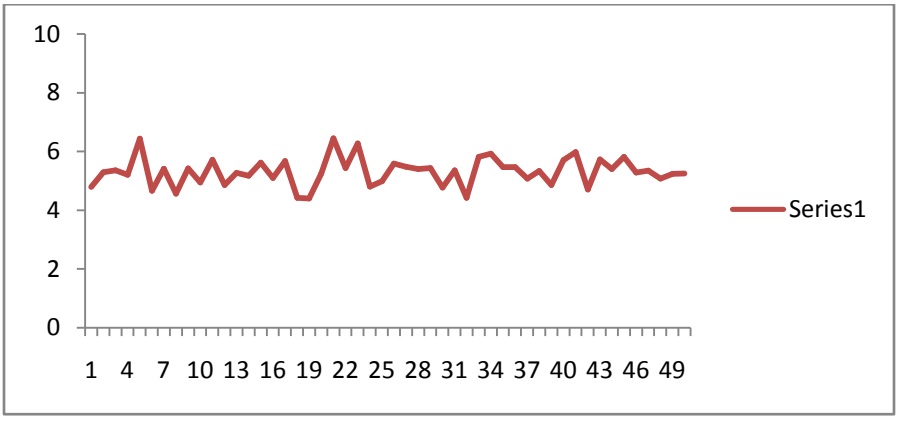
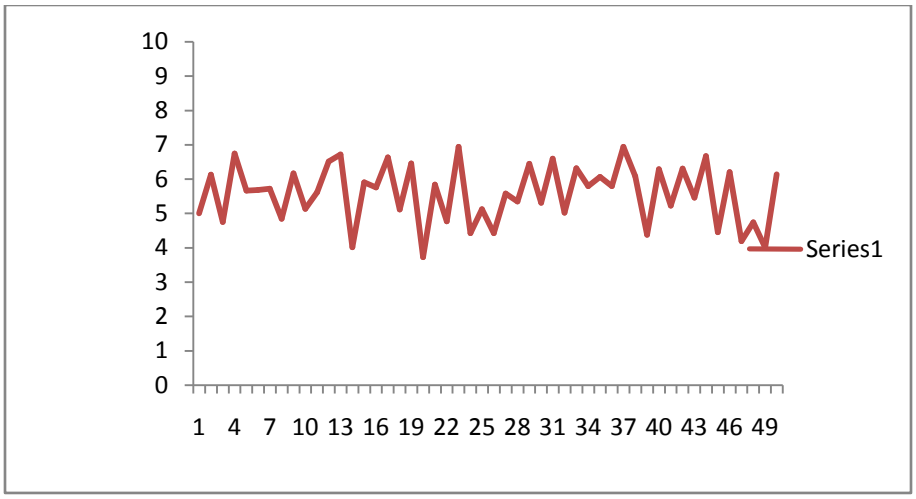


Grupi i Katërt

a) Rasti i qëndrueshëm



b) Rasti jo i qëndrueshëm



c) Jo qëndrueshmëri e theksuar